

Geschichte.

Neugebauer, O.: *Arithmetical methods for the dating of Babylonian astronomical texts.* Studies Essays, pres. to R. Courant, 265—275 (1948).

Da nur wenige der zahlreichen babylonischen Ephemeridentexte aus den letzten drei vorchristlichen Jahrhunderten datiert sind, entsteht die Aufgabe, durch Fortsetzung der gegebenen Zahlenwerte eines datierten Textes (es handelt sich um die Glieder von Differenzenreihen 1. und 2. Ordnung, die zwischen zwei Extremen periodisch zu- und abnehmen) den Anschluß an die Werte eines undatierten Textes zu erreichen und diesen damit zeitlich einzuordnen. Die zur Beherrschung der genannten Aufgabe geeigneten mathematischen Beziehungen werden vom Verf. in Fortführung früherer Arbeiten eingehend entwickelt. Vgl. hierzu des Verf. „Untersuchungen zur antiken Astronomie III“ [Quell. Stud. Gesch. Math. 4, 193—346 (1938); dies. Zbl. 18, 49], bes. Summation linearer Zackenfunktionen (§ 9) und Kreisbild einer linearen Zackenfunktion (Anhang zu § 9). *Kurt Vogel* (München).

Bruins, E. M.: *On Plimpton 322. Pythagorean numbers in Babylonian mathematics.* Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 629—632 (1949).

Der babylonische Keilschrifttext Plimpton 322 (ediert in: O. Neugebauer und A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts...* with a Chapter by A. Goetze, Amer. Oriental Series, vol. 29, New Haven 1945) enthält eine Tabelle Pythagoreischer Zahlen, in deren ersten beiden Spalten die der Gleichung $d^2 = l^2 + b^2$ genügenden Werte von d und b eingetragen sind, während in der 3. Spalte die entsprechenden Werte von d^2/l^2 stehen. Die Diskussion der Tabelle durch die Herausgeber [s. R. Cl. Archibald, dies. Zbl. 31, 241] ergab, daß schon in der 1. Hälfte des 2. vorchristlichen Jahrtausends das Euklidische Bildungsgesetz für Pythagoreische Zahlentripel ($l = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $d = p^2 + q^2$ für p und q rel. prim und $p > q$) bekannt war und daß die Gleichung $d/l = \frac{1}{2}(p \cdot 1/q + q \cdot 1/p)$ den Aufbau der Tabelle und die Auswahl der etwa gleichmäßig abnehmenden Werte der 3. Spalte bestimmte. — Verf. zeigt, daß auch eine andere Erklärung möglich ist, wobei man nur mit einem Parameter auskommt. Ist λ eine rationale Zahl, dann erhält man das Tripel $d = \lambda + 1/\lambda$, $b = \lambda - 1/\lambda$ und $l = 2$. Die Werte für λ und $1/\lambda$ konnten dabei aus einer Reziprokentabelle, z. B. aus AO 6456 (s. O. Neugebauer, *Mathem. Keilschrift-Texte I*, Berlin 1935, S. 14—22; dies. Zbl. 12, 97) entnommen werden. So ergibt sich für $\lambda = 2$; $15 (= \frac{2^{15}}{60})$ aus AO 6456, Rs. II, 11^a $1/\lambda = 0$; 26, 40, somit $d = 2$; 41, 40, $b = 1$; 48, 20 ($l = 2$) oder (nach einer Multiplikation mit 3 und Division durch 5): $d = 1$; 37 (= 97), $b = 1$; 5 (= 65) und $l = 1$; 12 (= 72). Die Werte 1; 37 und 1; 5 stehen tatsächlich in Plimpton 322. — Da Verf. die ganze Tabelle aus den fortlaufenden Werten für λ einer Reziprokentabelle entstanden sieht, hält er die genannte gleichmäßige Abnahme der Werte der 3. Spalte für zufällig. Auf einige weitere Interpretationsvorschläge auch terminologischer Art kann nicht eingegangen werden, da dem Ref. der Text nicht zur Verfügung steht. *Kurt Vogel* (München).

• **Heath, Sir Thomas:** *Mathematics in Aristotle.* Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press 1949. XIV, 291 p. s. 21. — net.

Für Aristoteles war die Mathematik bei seinem allseitigen Interesse nur eine der vielen Wissenschaften, denen er seine Arbeit zuwandte. Da es ihm um das Grundsätzliche ging, um Klärung der Prinzipien, um das wissenschaftliche System, so kommt es, daß er an gewissen Problemen der damals beginnenden höheren Mathematik (z. B. den Kegelschnitten) vorüber-

geht, während andererseits zahlreiche Stellen in seinen Werken zeigen, daß er bestrebt ist, auch andere Wissenschaften *more geometrico* zu unterbauen oder durch mathematische Beispiele Klarheit zu schaffen. Dies bringt mit sich, daß die mathematischen Stellen bei Aristoteles in allen seinen Werken (von einigen beschreibenden Naturwissenschaften, Politik, Poetik und Rhetorik abgesehen) verstreut liegen, so daß man sie beim Studium von Einzelfragen erst mühevoll zusammentragen muß trotz aller wertvollen Hinweise, die sich in den grundlegenden Arbeiten von W. Jaeger, O. Becker, E. Frank, K. von Fritz, H. Hasse-H. Scholz, K. Reidemeister, E. Sachs, Fr. Solmsen, J. Stenzel, O. Toeplitz, B. L. van der Waerden u. a. finden. — Wie kein anderer war Sir Th. Heath berufen, diese schmerzlich empfundene Lücke mit dem vorliegenden Werk zu schließen, das seine letzten Arbeitsjahre erfüllte und das ihn auch im Jahre 1939 vorzeitig von einem ersten Krankenlager aufstehen hieß. — Nach einer Einleitung (S. 1—16), in der des Aristoteles Ansichten über die Mathematik in ihrer Beziehung zu den anderen Wissenschaften dargelegt sind, werden nach den in Betracht kommenden Schriften geordnet (*categoriae*, *analytica priora*, *anal. posteriora*, *topica*, *physica*, *de caelo*, *meteorologica*, *de anima*, *metaphysica*, *mechanica*, *de lineis insecabilibus*, *problemata*, *ethica*, *de motu animalium*, *de incesso animalium*) etwa 200 ausgewählte Stellen mathematischen Inhalts übersetzt, textkritisch und inhaltlich eingehend kommentiert und in ihrem historischen Zusammenhang untersucht, wobei auch vielfach die weitere Geschichte der Probleme betrachtet wird. — So liegt jetzt leicht zugänglich vor uns all das, was der große Organisator der Wissenschaft zu sagen hat über die grundlegenden mathematischen Hypothesen und Prinzipien, über Wesen der Mathematik, über Zahl und Gestalt, Raum, Zeit, Bewegung, Stetigkeit, das Unendliche, das mathematische System, über Beweis, Analysis, wissenschaftliche Exaktheit, über Schlüsse und Trugschlüsse oder über besondere Einzelfragen wie: Zahlensystem, Proportionen, das Irrationale, Quadratur des Kreises, Parallelenproblem, Gnomon, über Schönheit und erzieherische Bedeutung der Mathematik, über physikalische Probleme und vieles andere. — Ein Stellenverzeichnis und ein allgemeiner Index ist außer dem ausführlichen Inhaltsverzeichnis beigegeben; eine Bibliographie hat Verf. nicht hinterlassen, doch finden sich im Text selbst zahlreiche Belege. — Lady A. M. Heath gebührt der größte Dank dafür, daß sie (mit Sir D. Ross) das beim Tod von Sir Th. Heath (1940) vorgefundene Manuskript druckfertig machte und in einer ausgezeichneten Ausführung (Oxford University Press) herausgab als letztes Vermächtnis des nach Tannerys und Heibergs Tod besten Kenners griechischer Mathematik.

Kurt Vogel (München).

Boyer, Carl B.: Cartesian geometry from Fermat to Lacroix. Scripta math., New York 13, 133—153 (1947).

Die Arbeit enthält eine Vorlesung, die Verf. im Mai 1946 bei der Ortsgruppe New York der Mathematiker-Vereinigung von Amerika gehalten hat. Sie gibt in allgemeinen Umrissen eine Skizze der Entwicklung der analytischen Geometrie von 1637 bis 1797. Der Verf., der sich im wesentlichen auf die bekannten Geschichtswerke von Loria, Tropfke, Wieleitner und Coolidge stützt, bringt keine neuen Tatsachen. Aber er gibt einen klaren Überblick über den zeitlichen und kausalen Ablauf der Entwicklung, kennzeichnet die wichtigsten Werke, die in den 160 Jahren des Jugendalters der analytischen Geometrie erschienen sind und lenkt den Blick auf gewisse Züge, die in den sonstigen historischen Darstellungen nicht so deutlich hervortreten. Descartes' Betrachtungsweise zielt mehr auf die Konstruierbarkeit der Punkte eines geometrischen Ortes als auf die Gestalt der Kurve. Fermat dagegen befolgt zwar dieselbe Methode, aber seine Betrachtungsweise steht der heutigen näher. So unterscheidet Verf. zwischen einer analytischen Geometrie im Sinne Descartes' und einer solchen im Sinne Fermats. Er zeigt nun, daß in den einschlägigen Werken des 17. Jahrhunderts die cartesische Betrachtungsweise vorherrscht. Erst im 18. Jahrhundert rückte die Fermatsche Zielsetzung allmählich in den Vordergrund. Diese Entwicklung wird an drei bedeutsamen Perioden 1704—1707, 1748—1750 und 1795—1798 gezeigt. Für die erste sind Newtons Schriften, die „*Enumeratio linearum tertii ordinis*“ und die „*Arithmetica universalis*“ charakteristisch. Bedeutsam für die zweite sind Mac Laurins „*Treatise of algebra*“, M. G. Agnesis „*Instituzioni analytiche*“ und Eulers „*Introductio in analysis infinitorum*“. Sie lassen den steigenden Einfluß Fermats erkennen. Als kennzeichnend für die dritte Periode, in der Fermats Betrachtungsweise endgültig den Sieg davonträgt, werden die Werke von Monge und Lacroix angesehen, die das Vorbild für alle späteren Lehrbücher bilden. Die „*analytische Revolution*“, die in dem Werke von Lacroix („*Traité élémentaire de trigonométrie et application de l'algèbre à la géométrie*“, 1798) zum Durchbruch kommt, hat die Arithmetisierung der Mathematik im 19. Jahrhundert vorbereitet. Die ganze Entwicklung zeigt, daß die „*analytische Geometrie* ein französischer Beitrag zur Mathematik“ ist.

E. Löffler.

Ivins jr., William, M.: A note on Desargues' theorem. Scripta math., New York 13, 203—210 (1947).

Über Desargues und den nach ihm benannten Satz (die Seiten zweier in einer oder zwei Ebenen gelegenen perspektiven Dreiecke schneiden sich auf einer

Geraden und umgekehrt) sind vielfach historisch unrichtige Angaben gemacht worden, wohl deshalb, weil nur die ungenaue Wiedergabe durch M. Poudra [Oeuvres de Desargues réunies et analysées, Paris 1864] als Quelle diente. Demgegenüber bringt Verf. mit erklärendem Kommentar die Gedankengänge von Desargues selbst nach dem Abdruck in Bosses Perspective von 1648 unter Beigabe der Originalzeichnungen und einer photographischen Reproduktion. Weiterhin untersucht Verf. eingehend die Quellen, die Desargues zur Verfügung gestanden haben mochten, wobei besonders die Bekanntschaft mit L. Battista Alberti (1435) sich ergibt.

Kurt Vogel (München).

● Brockmeyer, E., H. L. Halstrøm and Arne Jensen: The life and works of A. K. Erlang. Kopenhagen: The Copenhagen Telephone Company. 1948. 277 p. (København: Akademiet for die Tekniske Videnskaber.).

Il volume si apre con un sobria esposizione della vita di A. K. Erlang, seguita da un accuratissimo studio sull'opera di questo eminente scienziato; studio svolto da A. Jensen per quel che riguarda i lavori a carattere statistico, da E. Brockmeyer per la parte più propriamente matematica e da H. L. Halstrøm per la parte elettrotecnica. — Dopo questa ampia e completa introduzione vengono riprodotti, nella traduzione in lingua inglese, i principali lavori di A. K. Erlang, che, pur avendo sempre come mira principale problemi riguardanti i telefoni, tuttavia spaziano nei più diversi campi della Scienza ed anzi proprio dall'avvicinamento di questi diversi campi traggono lo spunto per le più felici sintesi. — Agner Krarup Erlang è morto il 3 Febbraio 1929 a soli 51 anni. Egli ha portato con la Sua opera un contributo decisivo alla teoria del traffico telefonico. In Suo onore l'Unità internazionale di intensità di traffico telefonico è chiamata: erlang.

G. Pompilj (Roma).

Analysis.

Mengenlehre:

Levi, Beppo: Sopra l'aritmetica transfinita. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 1—6 (1949).

Verf. lehnt das Auswahlaxiom und daher die dadurch begründete Vergleichbarkeit aller Kardinalzahlen und ihre Repräsentation durch die Reihe $\aleph_0, \aleph_1, \dots$ ab. Nach seiner Meinung haben nur Mächtigkeiten einen Sinn, die zu konkreten axiomatisch definierten Mengen gehören und zu solchen, die sich aus jenen mit Hilfe der mengentheoretischen Operationen bilden lassen. So sind die Mächtigkeit \aleph_0 der Menge der natürlichen Zahlen und die Mächtigkeiten der sich ergebenden Potenzmengen $2^{\aleph_0}, 2^{(2^{\aleph_0})}, \dots$ wohl definiert. Geht man von axiomatisch anders fundierten Mengen aus, so kommt man evtl. zu anderen Reihen von Mächtigkeiten. Verschiedene dieser Reihen sind im allgemeinen unvergleichbar. W. Ackermann.

Sierpiński, Waclaw: Sur l'inversion du théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé. Fundam. Math., Warszawa 34, 155—156 (1947).

Es wird bewiesen: Wenn die Kontinuumshypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ richtig ist, so ist jeder metrische Raum E separabel, sobald er die Eigenschaft hat, daß jede Folge von Teilmengen von E eine konvergente Teilfolge enthält. Aumann.

Halmos, Paul R.: On the set of values of a finite measure. Bull. Amer. math. Soc. 53, 138—141 (1947).

Es sei \mathfrak{S} ein σ -Körper von Teilmengen der Grundmenge X , X selbst soll in \mathfrak{S} enthalten sein. Es sei ferner in \mathfrak{S} ein endliches, nicht negatives und totaladditives Maß $\mu_i(E)$, $i = 1, 2$, $E \in \mathfrak{S}$ erklärt. Ein Element $E \in \mathfrak{S}$ mit $\mu_i(E) > 0$ heißt ein Atom für μ_i , wenn für jedes $F \in \mathfrak{S}$ mit $F \prec E$ entweder $\mu_i(F) = 0$ oder $\mu_i(F) = \mu_i(E)$ gilt. Verf. zeigt dann in einfacher Weise zwei bekannte Sätze [s. K. R. Buch, Danske Vid. Selsk., Math.-Fys. Medd. 21, Nr. 9 (1945)], nämlich: 1. Der Wertbereich von $\mu_i(E)$, $E \in \mathfrak{S}$, bildet eine abgeschlossene Menge der Zahlengeraden, 2. Die Paare $\{\mu_1(E), \mu_2(E)\}$ $E \in \mathfrak{S}$ bilden eine abgeschlossene Menge der Ebene. Den ersten Satz beweist Verf., indem er zeigt, daß der Wert-

bereich von μ_i für alle Atome für μ_i in \mathfrak{S} eine abzählbare und abgeschlossene Menge ist und für die übrigen Elemente von \mathfrak{S} ein abgeschlossenes Intervall. Der Beweis des zweiten Satzes ist wegen der Unrichtigkeit eines Lemmas, was übrigens in einer späteren Arbeit [s. nachfolgendes Referat] von Verf. bemerkt wurde, hinfällig.

D. A. Kappos (Erlangen).

Halmos, Paul R.: The range of a vector measure. Bull. Amer. math. Soc. 54, 416—421 (1948).

In dieser Arbeit gibt Verf. einen Beweis des Satzes 2 (s. vorsteh. Referat) und zwar allgemeiner, indem er die Voraussetzung der Nichtnegativität für μ_i fallen läßt und statt Paare allgemein N -Tupel $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, ein sogenanntes N -dimensionales Maß $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ betrachtet. Er zeigt außerdem [s. auch A. Liapounoff, Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 4, 465—478 (1940); dies. Zbl. 24, 385] daß der Wertbereich von $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ eine konvexe Menge des N -dimensionalen Raumes bildet, wenn für keine der Komponenten μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ Atome in \mathfrak{S} existieren.

D. A. Kappos (Erlangen).

Mossaheb, G. H.: On the problem of the set of distances. J. London math. Soc. 22, 252—256 (1947).

Anknüpfend an Besicovitch und Miller [dies. Zbl. 30, 244] stellt Verf. folgende Frage: Gegeben sei eine einfache Kurve K in der Ebene R_2 mit endlichem, positivem a -dimensionalem Maß (kurz: a -Maß), wobei $1 < a < 2$, und mit positiver unterer a -Dichte in jedem Punkt von K . Ist dann jede Teilmenge von K mit positivem a -Maß stets eine D -Menge? Dabei wird eine Menge $M \subset R_2$ als D -Menge bezeichnet, wenn in der Zahlenmenge $E(M)$, gebildet aus den Entfernungen je zweier Punkte von M ein Intervall $(0, h)$ enthalten ist. Zur Beantwortung dieser Frage wird zunächst eine perfekte Menge P von positivem a -Maß und von positiver unterer a -Dichte in jedem Punkt (von P) konstruiert, die keine D -Menge ist. Sodann wird zu P , eine P enthaltende einfache Kurve K von positivem a -Maß und von positiver unterer a -Dichte in jedem Punkt konstruiert, derart, daß das a -Maß von K beliebig wenig abweicht von dem a -Maß von P .

Haupt (Erlangen).

Besicovitch, A. S.: On distance-sets. J. London math. Soc. 23, 9—14 (1948).

1. Nach früher Bewiesenem (Verf. und Miller, dies. Zbl. 30, 244) gilt folgendes: Jede reguläre Menge in der Ebene R_2 ist eine D -Menge; dabei heißt „regulär“ jede linear meßbare Menge (in R_2), die überall die lineare Dichte 1 besitzt, ausgenommen höchstens eine Menge von Punkten vom linearen Maß Null, ferner heißt eine Menge „ D -Menge“, wenn die Menge der Entfernungen je zweier ihrer Punkte ein Intervall $(0, h)$ enthält. — 2. Das vorstehende Theorem ist gleichwertig mit folgendem: K sei eine rektifizierbare Kurve in R_2 ; ist dann T eine beliebige Teilmenge von K , die ein lineares Maß kleiner als die Länge von K besitzt, so ist $(K - T)$ eine D -Menge. — 3. Mossaheb [s. vorsteh. Referat] hat gezeigt: Der in 2. angeführte Satz verliert seine Gültigkeit, wenn an Stelle der rektifizierbaren Kurve K eine Kurve K' tritt, die endliches a -dimensionales Maß (kurz: a -Maß) besitzt ($1 < a < 2$) und deren untere a -Dichte in jedem Punkt von K' positiv ist, wenn ferner an Stelle von T eine Menge T' tritt, die ein a -Maß besitzt, welches kleiner ist als das a -Maß von K' . — 4. Verf. stellt nun die neue Frage: Gilt das in 2. angeführte Theorem, wenn K von unendlicher Länge und T von beliebig kleinem linearen Maß ist? — 5. Diese Frage wird zurückgeführt auf die folgende: Existiert zu beliebig gegebenen $e > 0$ und $d > 1$ eine Kurve K vom Durchmesser d und eine Teilmenge T von K vom linearen Maß $< e$, so daß die Menge der Entfernungen je zweier Punkte von $(K - T)$ die 1 nicht enthält? — Die Frage 5. wird durch Konstruktion von Kurven der gefragten Beschaffenheit für jedes $e > 0$ und jedes $d > 1$ bejahend beantwortet und damit die Frage 4. verneinend.

Haupt (Erlangen).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

• **Hahn, Hans and Arthur Rosenthal:** *Set functions.* Albuquerque, New Mexico: The University of New Mexico Press 1948. IX, 324 p.

Das Werk gibt eine in ihrer Reichhaltigkeit und Exaktheit wohl einzigartige Theorie der reellen Mengenfunktionen. Die Definitionsbereiche sind meist beliebige (Hausdorffsche) Mengenkörper bzw. σ -Mengenkörper; nur gelegentlich werden die Mengen als in topologische, speziell metrische Räume oder als in den euklidischen Raum eingebettet angenommen. Dem im Buche eingenommenen Standpunkt entsprechend wird das (unbestimmte) Integral einer reellen Punktfunktion $f(x)$ definiert als totaladditive Mengenfunktion mit gewissen Mittelwerteigenschaften, so daß die Auffassung als lineares Funktional demgegenüber zurücktritt. Einschränkende Voraussetzungen bei den einzelnen Theoremen sind stets durch Angabe von Gegenbeispielen begründet. Eingehende Literaturhinweise erleichtern den Zugang zu den Originalarbeiten. Über den Inhalt mögen folgende Angaben orientieren: Einleitung: Mengenalgebra; topologische und metrische Räume. Kap. I. Additive und totaladditive (Mengen-)Funktionen; Zerlegung der totaladditiven Funktionen nach einem σ -Ideal in regulären und singulären Teil, Spezialfälle: Zerlegung in stetigen und unstetigen Teil, in atomfreien und atomistischen Teil, in totalstetigen und singulären Teil; Folgen totaladditiver Funktionen. Kap. II. Maßfunktionen [Nicht-fallende, vereinigungsbeschränkte Funktionen $F(\mathfrak{M})$ mit $F(\emptyset) = 0$] und zugehörige Maße; Maßfunktionen in metrischen und euklidischen Räumen. Kap. III. Meßbare Punktfunktionen. Konvergenzbegriffe bei Folgen meßbarer Funktionen. Stetigkeitseigenschaften meßbarer Funktionen in metrischen Räumen. Kap. IV. Integration. Integrierbare Funktionen; Lebesguesche, Riemannsche und Darboux'sche Summen; Mittelwertsätze und Ungleichungen; Konvergenzsätze; Multiplikation von Mengenfunktionen; iterierte Integrale. Kap. V. Differentiation von Mengenfunktionen (in metrischen Räumen), insbesondere: Ableitung totaladditiver Funktionen nach Vitalischen und verwandten Mengensystemen; Dichtesatz; Vitalischer Satz im R_n ; Integration und Differentiation; Integraltransformation; Differentiation von Intervallfunktionen. — In den Bezeichnungen schließt sich das Werk an H. Hahn, *Reelle Funktionen* I. Leipzig 1932 (dies. Zbl. 5, 389) an. Haupt (Erlangen).

• **McShane, Edward James:** *Integration.* Princeton: Princeton University Press 1947. VIII, 394 p.

Behandelt wird die Integraltheorie für reelle Integranden, deren Definitionsbereiche Mengen des euklidischen E_n sind. Diese Beschränkung empfiehlt sich insbesondere für den Anfänger im Hinblick auf unmittelbare Anwendungen in der klassischen Analysis; allerdings tritt dabei die große Verallgemeinerungsfähigkeit vieler Begriffe und Entwicklungen nicht ohne weiteres zutage. Das Darboux-Riemannsche Ober- bzw. Unterintegral von $f(x)$ über das Intervall J wird (nach dem Vorgang von Daniell) eingeführt als untere bzw. obere Grenze der Integrale der (elementaren) Treppenfunktionen $t(x)$ mit $f(x) \leq t(x)$ bzw. $t(x) \leq f(x)$. In der Definition des (Daniell-)Lebesgueschen Ober- bzw. Unterintegrals treten an Stelle der Treppenfunktionen die unterhalb- bzw. oberhalb stetigen, nach unten bzw. nach oben beschränkten Funktionen $u(x) \geq f(x)$ bzw. $l(x) \leq f(x)$; dabei ist das Integral von $u(x)$ bzw. von $l(x)$ erklärt als obere bzw. untere Grenze der Integrale aller stetigen Funktionen $s(x) \leq u(x)$ bzw. $s(x) \geq l(x)$. Es ist somit insbesondere das Lebesguesche Integral definiert, sobald nur das Integral für die Treppenfunktionen irgendwie eingeführt ist. Ein Maß wird also (wenigstens explizite) für die Integraldefinition nicht benötigt; vielmehr wird ein solches erst a posteriori durch das Integral der über jeden Würfel ($-n \leq x_n \leq n$) summierbaren charakteristischen Funktionen eingeführt. Später wird ganz entsprechend das (Daniell-Radon-)Lebesgue-Stieltjes-Integral behandelt, bei dessen Definition im Integral der Treppenfunktionen der Inhalt ΔJ eines Intervalles J ersetzt wird durch eine additive Intervallfunktion $F(J)$. — [Es wird auch gezeigt, daß $F(J)$ vermittelst einer (geeigneten) endlichen Punktfunktion $g(x)$ analog dargestellt werden kann wie ΔJ vermittelst des Produktes $g(x) = x_1 \dots x_n$.] Der hiermit angedeutete, vom üblichen abweichende Aufbau bedingt natürlich auch vielfach andere Beweise. Auch in dieser Hinsicht ist das sehr sorgfältig geschriebene und gut ausgestattete Buch von großem Interesse und sehr lesenswert. (Es darf bemerkt werden, daß die Heranziehung stetiger bzw. halbstetiger Funktionen zur Integraldefinition eine Bezugnahme auf die Topologie des E_n darstellt, die an sich für die Definition des Lebesgueintegrals im üblichen Sinne als eines Unterteilungsintegrals nicht erforderlich ist.) Übersicht über den Inhalt: Kap. 1. Reelle Funktionen. Topologie im E_n . Kap. 2. Riemann- und Lebesgueintegral. Kap. 3. Meßbare Mengen und Funktionen. Kap. 4. Integral als Mengenfunktionen. Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen. Kap. 5. Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Kap. 6. Stetigkeitseigenschaften meßbarer Funktionen. Kap. 7. Lebesgue-Stieltjesintegral. Kap. 8. Perronintegral für Funktionen einer Variablen. Kap. 9. Differentialgleichungen. Kap. 10. Differentiation mehrfacher Integrale. Haupt (Erlangen).

Bagehi, Hari Das: *Note on a class of infinite Riemannian integrals.* Bull. Calcutta math. Soc. 41, 103—112 (1949).

Triviale Anwendungen wohlbekannter Sätze über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit einen Parameter enthaltender Integrale. Császár (Budapest).

Stark, Richard H.: On the representation of a function as a Hellinger integral. Bull. Amer. math. Soc. 55, 155—159 (1949).

Verf. gibt einen neuen Beweis für den bekannten Satz von Hellinger (Inaugural-Dissertation, Göttingen 1907): Sind die nichtabnehmenden, stetigen Funktionen $g(x)$, $h(x)$ im Intervall $[0, 1]$ gegeben mit $g(0) = h(0) = 0$, so gibt es eine Dar-

stellung $h(x) = \int_0^x \frac{(df)^2}{dg}$ dann und nur dann, wenn jede Menge vom Maß eins bezüglich

lich $g(x)$ auch Menge vom Maß eins bezüglich $h(x)$ ist. Dieser Beweis ist einfacher als der Originalbeweis von Hellinger und elementarer als die Beweise von Hahn und Hobson, die die Lebesguesche Integraltheorie anwenden. Császár.

Ellis, H. W.: Mean-continuous integrals. Canadian J. Math. 1, 113—124 (1949).

Eine Folge von Integrationsprozessen $(G M_r)$ ($r = 0, 1, \dots$) wird induktiv definiert auf folgende Weise: $(G M_0)$ ist das allgemeine Denjoysche Integral. $f(x)$ ist $(G M_r)$ -integrierbar im Intervall (a, b) , wenn es eine Funktion $F(x)$ gibt, die α fast überall in (a, b) eine approximative Ableitung $= f(x)$ hat, β in (a, b) (ACG) ist,

d. h. es gilt $(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, jede Menge E_n ist abgeschlossen und $F(x)$ ist absolut stetig auf ihr, γ in (a, b) M_r -stetig ist, d. h. für $a \leq x \leq b$

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{h^r} (G M_{r-1}) \int_x^{x+h} (x+h-t)^{r-1} F(t) dt$$

gilt. Ist $f(x)$ in (a, b) $(G M_r)$ -integrierbar, so ist

$$(G M_r) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Die so eingeführten Integrale besitzen die bekannten Eigenschaften des Denjoyschen Integrals mit der Ausnahme der Stetigkeit des unbestimmten Integrals, und lassen eine der Denjoyschen ähnliche konstruktive Definition zu. Statt der Stetigkeit besitzen sie die Darboux'sche Eigenschaft. — Das Integral $(G M_r)$ umfaßt das von J. C. Burkill [Proc. London math. Soc. II. S. 34, 314—322 (1932) und 39, 541—552 (1935); dies. Zbl. 5, 392; 12, 204] eingeführte Cesàro-Perronsche Integral r -ter Ordnung, seine Definition ist aber einfacher, denn sie erfordert nur die Verallgemeinerung des Begriffs der Stetigkeit, während bei Burkill auch der Begriff der Ableitung zu verallgemeinern ist. Császár (Budapest).

Cesari, Lamberto: Sulla trasformazione degli integrali doppi. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 321—374 (1948).

Verf. beweist [auf anderem Wege als Radò und Reichelderfer, Trans. Amer. math. Soc. 49, 258—307 (1941); dies. Zbl. 24, 387] folgendes: Es sei $Z = \Phi(W) = (x(u, v), y(u, v))$ eine eindeutige stetige Abbildung des Einheitsquadrates A der u, v -Ebene auf die abgeschlossene Menge B der x, y -Ebene, also $B = \Phi(A)$. Ferner sei $H(u, v)$ die verallgemeinerte Funktionaldeterminante von Φ , außerdem $\Psi(x, y, \Phi)$ bzw. $n(x, y, \Phi)$ die absolute bzw. relative charakteristische Funktion von Φ [zur Definition dieser und anderer Begriffe vgl. z. B. dies. Zbl. 26, 308; die dort nicht erwähnte Funktion $n(x, y, \Phi)$ erhält man aus $\Psi = \lim_{i=1}^m \sum |O(x, y; C_i)|$,

wenn man die Absolutstriche wegläßt und die C_i als Polygonbilder wählt, die noch gewissen Bedingungen genügen]. Schließlich sei $f(x, y)$ endlich in B und $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Es wird gezeigt: (1) Ist Φ von beschränkter Variation, so gilt

$$\iint_A |H| du dv \leq \iint_B |\Psi(x, y, \Phi)| dx dy;$$

und hierin steht das Gleichheitszeichen, wenn und nur wenn Φ absolut stetig ist.
(2) Bei absolut stetigem Φ ist überdies

$$\iint_A F|H| du dv = \iint_B f\Psi dx dy \quad \text{und} \quad \iint_A FH du dv = \iint_B fn dx dy,$$

sofern nur mindestens einer der Integranden FH , $f\Psi$ quasistetig und L -integrierbar ist.

Haupt (Erlangen).

Pagni, Mauro: Su un teorema relativo all'esistenza di soluzioni per un sistema di n equazioni ad n incognite. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 234—238 (1949).

Verf. definiert: Die reelle Funktion $f(\xi)$ der n reellen Veränderlichen $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \xi$ heißt im Punkt ξ_0 nach unten linear halbstetig im engeren Sinne (kurz ULE-stetig), wenn $\liminf_{\xi \rightarrow \xi_0} f(\xi_0 + \lambda e) = f(\xi_0)$ für jeden Richtungs-

$$\lambda \geq 0$$

vektor e , und im Punkt ξ_0 nach unten halbstetig im starken Sinne (US-stetig), wenn es zu beliebigen positiven ε , ϱ ein r mit $0 < r < \varrho$ gibt, so daß $f(\xi) < f(\xi_0) + \varepsilon$ für alle ξ auf der Kugel $|\xi - \xi_0| = r$. Er beweist: Es seien die Funktionen $f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)$ für jeden Punkt des Würfels $W = [0 \leq x_i \leq 1; i = 1, \dots, n]$ eindeutig definiert mit der Eigenschaft, daß für $j = 1, \dots, n$ die Funktion f_j auf $x_j = 0$ negativ, auf $x_j = 1$ positiv ist. I. Sind alle f_k ULE-stetig auf W , dann existiert ein Punkt auf W , welcher Häufungspunkt von Nullstellen jeder Funktion f_k ist. — II. Sind alle f_k US-stetig auf W , dann gibt es im Innern von W eine gemeinsame Nullstelle aller f_k .

Aumann (Würzburg).

Conti, Roberto: Su una nuova classe di funzoni „a variazione limitata“ di due variabili e le sue relazioni con le classi H , A , P . Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 53—57 (1949).

Sei R ein abgeschlossener Rechtecksbereich: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. 1. Mit A sei die Klasse der über R definierten reellen Funktionen $f(x, y)$ bezeichnet, für welche gilt: „Bildet man für $m = 1, 2, \dots$ und beliebige $(m+1)$ -tupel von Punkten (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, m$), die den Bedingungen (β) $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$ und $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = d$ genügen,

die Menge der Zahlen $\sum_{i=0}^{m-1} |f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)|$, so sei deren mit v_A bezeichnete obere Grenze

endlich. A heiße auch die Klasse der Funktionen mit „nach Arzela“ beschränkter Variation. 2. Mit H sei die Klasse der über R definierten reellen Funktionen $f(x, y)$ bezeichnet, für welche gilt: „Bildet man für $m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$ und beliebige $(m+1)(n+1)$ -tupel von Punkten (x_r, y_s) , die den Bedingungen genügen: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ und $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$, — keine „=“ Zeichen zwischen x_0 und x_m , bzw. y_0 und y_n ! — die Menge der Zahlen

$$\sum_{\substack{r=0 \\ s=0}}^{r=m-1, s=n-1} |f(x_r, y_s) + f(x_{r+1}, y_{s+1}) - f(x_r, y_{s+1}) - f(x_{r+1}, y_s)|,$$

so sei deren obere Grenze endlich. (Die diesen Bedingungen genügenden Funktionen heißen von „nach Vitali“ beschränkter Variation). Außerdem aber gebe es in $[a, b]$ ein \bar{x} und in $[c, d]$ ein \bar{y} , so daß die Funktionen von \bar{y} , bzw. von $x: f(\bar{x}, y)$ bzw. $f(x, \bar{y})$ in $[c, d]$ bzw. in $[a, b]$ von beschränkter Variation seien. — H heiße auch die Klasse der Funktionen mit „nach Hardy“ beschränkter Variation“. 3. J_{xy} bedeute die Klasse der Funktionen, die in R im Jordanschen Sinne von beschränkter Variation sind, J_s die Klasse der Funktionen, die auf jeder in R liegenden Strecke von beschränkter Variation sind und P die Klasse der Funktionen, die nach Pierpont-Hahn (vgl. Hahn, Theorie der reellen Funktionen. Berlin 1921) von beschränkter Variation sind. — Verf. führt nun — als neue Klasse — die Klasse \bar{A} jener Funktionen $f(x, y)$ ein, für

welche gilt: „Die obere Grenze \bar{v}_A der Menge der Zahlen $\sum_{i=0}^{m-1} |f(x_{i+1}, y_{m-(i+1)}) - f(x_i, y_{m-i})|$,

wobei die x_i und y_i wieder den Bedingungen (β) genügen, ist endlich“. Verf. beweist nun — z. T. unter Hinweis auf bekannte Literatur, sowie auf die Möglichkeit, durch einfache Beispiele gewisse Aussagen zu gewinnen —, daß sich die bekannten Relationen $H \subset A \subset P$, J_{xy} verschärfen lassen zu: $H \subset A \bar{A} \subset A + \bar{A} \subset P$, J_{xy} und $H \subset A \bar{A} \subset J_s$, worin $A \bar{A}$ Mengendurchschnitt, $A + \bar{A}$ Mengenvereinigung von A und \bar{A} bedeutet. — Auf S. 54, Z. 18 v. u. ist ein Druckfehler unterlaufen: Es soll heißen \bar{v}_A statt v_A .

H. Wendelin (Graz).

Faedo, Sandro: Alcuni nuovi criteri di eguale continuità per le funzioni di più variabili. *Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 6*, 188—202 (1947).

Die direkten Methoden der Variationsrechnung legen die Benutzung des Begriffs einer gleichgradig stetigen Schar von Funktionen nahe. Im Falle von einer und zwei unabhängigen Veränderlichen bestehen nach L. Tonelli hinreichende Bedingungen für gleichgradige Stetigkeit einer Schar in Gestalt integraler Ungleichungen. — Im Falle zweier Veränderlichen werden zunächst drei Abwandlungen der Tonellischen Ungleichungen bewiesen; zum Schluß wird die Verallgemeinerung auf beliebig viele Veränderliche ausgesprochen.

W. Maier (Jena).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bari, N. K.: Das Problem der Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe. *Uspechi mat. Nauk 4*, Nr. 3 (31), 3—68 (1949) [Russisch].

An expository article on sets of uniqueness and multiplicity for trigonometric series and the ordinary convergence. Beside the older results of Menchoff, the author, Rajchman and Zygmund, much attention is paid to recent papers of Salem.

G. G. Lorentz (Toronto).

Džrbašjan, M. M.: Über metrische Kennzeichen der Vollständigkeit eines Polynomensystems bei gewogener Annäherung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 66, 1037—1040 (1949) [Russisch].

Es sei $h(z)$ eine positive Funktion, die in $|z| < 1$ definiert und somit in jeder abgeschlossenen Teilmenge des Einheitskreises nach unten beschränkt ist; ferner sei das Integral $\iint_{|z| < 1} h(z) dx dy$ endlich. Dann heiße $H_2(h)$ die Klasse aller im

Einheitskreis holomorphen Funktionen, für die $\iint_{|z| < 1} h(z) |f(z)|^2 dx dy$ existiert, und das System (aller) Polynome heiße vollständig in bezug auf $H_2(h)$, wenn für ein beliebiges Polynom Q

$$\inf_{|z| < 1} \iint h(z) |f(z) - Q(z)|^2 dx dy = 0.$$

Verf. teilt ohne Beweise einige Sätze mit, die Bedingungen der Vollständigkeit angeben, z. B.: 1. Ist in $|z| < 1$ die Funktion der Ungleichung $h(z) \leq Ah(rz)$ mit $A > 0$ und $r_0 \leq r < 1$ unterworfen, so ist das Polynomensystem bezüglich $H_2(h)$ vollständig. 2. Ist $P(r)$ eine reelle Funktion mit

$$P(r) = P(1) \int_1^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad r \geq 1, \quad \omega(t) \text{ nicht fallend, } \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = +\infty,$$

so ist die Divergenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{P(r)}{r^{1+\alpha}} dr$ für die Vollständigkeit des Polynomensystems notwendig und hinreichend. Dabei sind die Doppelintegrale über ein gewisses Teilgebiet der Ebene zu erstrecken, α ist eine gewisse durch das Integrationsgebiet bestimmte positive Zahl.

W. Hahn (Berlin).

Valiron, Georges: Remarque sur la représentation approchée par des polynomes des fonctions continues de plusieurs variables. *Bull. Sci. math., II. S. 72*, 9—12 (1948).

L'A. nota che dall'applicazione ripetuta del teorema di Féjer sulla somma $(C, 1)$ delle serie trigonometriche di Fourier si consegue immediatamente il teorema di Weierstrass sull'approssimazione uniforme con una successione di polinomi delle funzioni continue $f(P)$ definite in un dominio rettangolare R dello spazio ad n

dimensioni ($n \geq 1$). — Passando poi al caso che la $f(P)$ sia definita in un dominio limitato D , appartenente ad R , l'A. senza ricorrere al teorema di Lebesgue sulla possibilità di prolungare con continuità la $f(P)$ in tutto R , mostra assai semplicemente che si può costruire una successione di polinomi che in D converge uniformemente verso $f(P)$, e che in ogni dominio interno al complementare di D in R converge verso lo zero.

Giovanni Sansone (Firenze).

Malmquist, F.: Approximation of real functions by linear exponential expressions. 10. Skand. Mat. Kongr., København 1946, 70—76 (1947).

Die Anpassung einer elementaren Ersatzfunktion der Form $\sum_0^n A_s e^{a_s x}$ an eine vorgegebene Funktion $f(x)$ wird nach verschiedenen Gesichtspunkten durchgeführt. Einmal wird die Gleichheit der $2n - 1$ ersten Ableitungen im Nullpunkt und sodann die Übereinstimmung in $2n$ äquidistanten Punkten gefordert. Anwendungen im Falle des Makehamschen Gesetzes.

H. Hadwiger (Bern).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Hahn, Wolfgang: Über Polynome, die gleichzeitig zwei verschiedenen Orthogonalsystemen angehören. Math. Nachr., Berlin 2, 263—278 (1949).

Se $\{\varphi_n(x)\}$ è una successione di polinomi, ciascuno di grado uguale al suo indice, si dice che essi formano una catena di polinomi (Polynomkette) ove siano legati da una formula ricorrente $\varphi_n(x) = (a_n x + b_n) \varphi_{n-1}(x) - c_n \varphi_{n-2}(x)$ con a_n, b_n, c_n costanti. Una tale successione, se le costanti c_n sono tutte positive, forma una successione ortogonale rispetto ad un'opportuna funzione peso in un conveniente intervallo. — Dalla successione dei polinomi di Tchebychef-Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$:

$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha} \frac{d^n (e^{-x} x^{\alpha+\alpha})}{dx^n}}{n!}$ [ortogonale in $(0, \infty)$ rispetto alla funzione peso $e^{-x} x^\alpha$, $\alpha > -1$] si ottiene la catena di polinomi di Poisson-Charlier $\{p_n(y)\}$

con la formula $p_n(y) = a^{-\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} L_n^{(y-n)}(a)$ e in analogia a questo fatto l'A. costruisce nuove classi di polinomi $\varphi_n(x, y)$ di due variabili indipendenti x, y che formino rispetto all'una ed all'altra variabile due distinte catene di polinomi, che soddisfino quindi ad una formula ricorrente del tipo

$$\varphi_n(x, y) = [a_{1,n} x y + a_{2,n} x + a_{3,n} y + a_{4,n}] \varphi_{n-1}(x, y) - a_{5,n} \varphi_{n-2}(x, y)$$

con le $a_{i,k}$ indipendenti da x e da y . — L'A. applica il suo metodo per determinare una relazione ricorrente tra i polinomi di una classe di G. Szegő ortogonale sul cerchio unità rispetto ad una funzione peso $f(z)$; i coefficienti di tale relazione si esprimono in modo semplicissimo per i momenti trigonometrici di $f(z)$.

Giovanni Sansone (Firenze).

Hahn, Wolfgang: Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen. Die 24 Integrale der hypergeometrischen q -Differenzgleichung. Das q -Analogon der Laplace-Transformation. Math. Nachr., Berlin 2, 340—379 (1949).

Le serie generalizzate di Heine

$${}_n\varphi_{n-1}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_{n-1}; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-a_1)_r \dots (1-a_{n-1})_r (1-a_n)_r}{(1-b_1)_r \dots (1-b_{n-1})_r (1-q)_r} x^r, x^2,$$

$$(a+b)_r = (a+b)(a+qb) \dots (a+q^{r-1}b) \quad (r=0, 1, \dots, |q| \neq 1),$$

per un teorema di J. Thomae [Ann. Mat. pura appl., Milano, II. S. 4, 105—139 (1871)], soddisfano un'equazione lineare alle q differenze di ordine n . — L'A. inverte la questione e determina la soluzioni $f(x)$ delle equazioni lineari omogenee alle q -differenze del primo e del secondo ordine

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1 x) f(qx) - (a_2 - b_2 x) f(x) &= 0, \\ (a_1 - b_1 x) f(q^2 x) - (a_2 - b_2 x) f(qx) - (a_3 - b_3 x) f(x) &= 0, \end{aligned}$$

con le a e b costanti. — Particolare interesse ha il caso dell'equazione ipergeometrica alle q -differenze

$$(c - abqx) f(q^2 x) - [c + q - (a + b)qx] f(qx) + q(1 - x) f(x) = 0$$

per la quale l'A. determina 24 soluzioni principali che per $q \rightarrow 1$ tendono alle classiche 24 soluzioni di Kummer dell'equazione ipergeometrica di Gauss. — L'A. studia pure le funzioni

$$e_q(x) = 1/(1-x)_\infty = \sum_{r=0}^{\infty} x^r / (1-q)_r, \quad {}_qJ_r(x) = \frac{1}{(1-q)_r} \left(\frac{x}{2}\right)^r {}_0\phi_1\left(q^{r+1}; -q^{r+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$$

analoghe alla funzione esponenziale e alla J_r di Bessel, e la trasformazione

$${}_qL_s F(x) = {}_qL F(x) = \frac{(1-q)_\infty}{s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^i F(s^{-1} q^i)}{(1-q)_i}$$

che generalizza la trasformazione di Laplace e alla quale egli estende il teorema di composizione [Faltungssatz] ${}_qL F(x) {}_qL G(x) = {}_qL(F(x) (*) G(x))$ definendo opportunamente l'operazione (*). Giovanni Sansone (Firenze).

Truesdell, C.: A note on the Poisson-Charlier functions. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 450—454 (1947).

L'A., dopo aver osservato che le proprietà dei polinomi di Poisson-Charlier:

$$p_n(m, z) = (-1)^m e^z z^{-m} d^n (e^{-z} z^m) / dz^n$$

possono essere ottenute in modo assai semplice mediante la Sua F -equazione [questo Zbl. 31, 391]: $F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1)$, estende la definizione dei detti polinomi al caso di valori reali qualunque di m ed n ; e conclude dimostrando l'identità:

$$p_\beta(\alpha, z) = \cos(\beta - \alpha) \pi I(\alpha + 1) z^{-\alpha} L_\alpha^{(\beta - \alpha)}(z)$$

dove $L_\alpha^{(\beta - \alpha)}(z)$ è la ben nota funzione di Laguerre generalizzata.

G. Pompilj (Roma).

Grammel, R.: Eine Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Ingenieur-Arch. 16, 188—200 (1948).

Verf. berechnet den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $x^n + y^n = 1$ ($n > 1$, ganz), der x -Achse und dem Fahrstrahl vom Nullpunkt nach dem Kurvenpunkt (x, y) begrenzt wird, zu

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2} \int_x^1 (1 - x^n)^{(1-n)/n} dx.$$

Für $n = 2$ (Kreisgleichung) ist $v = \arccos x$. Daher wird für $n > 2$ die obenstehende Funktion v als Verallgemeinerung der Funktion $\arccos x$ betrachtet und mit $\text{Ar Cos}(n)x$ sowie die Umkehrfunktion mit $x = \text{Cos}(n)v$ bezeichnet. Ähnlich wird die Funktion $y = \text{Sin}(n)v$ eingeführt. — Eine Fülle von Funktionalbeziehungen, Reihenentwicklungen und Integralformeln wird angegeben, die sich für $n = 2$ alle auf die bereits bekannten Relationen reduzieren. — In genau der gleichen Weise werden durch Einführung der Grundgleichung $x^n - y^n = 1$ die verallgemeinerten Hyperbelfunktionen eingeführt. — Vgl. auch die Besprechg. der Voran- zeige in dies. Zbl. 31, 120.

Oberhettinger (Pasadena).

Funktionentheorie:

Hayman, W. K.: Inequalities in the theory of functions. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 450—473 (1949).

En appliquant une méthode classique d'Ahlfors (longueur, aire, inégalité de Schwarz) à l'étude de certaines fonctions automorphes, l'Aut. étend des théorèmes de Littlewood et de Cartwright. Il parvient essentiellement au résultat suivant: Soit une suite infinie de valeurs w_n telles que $w_0 = 0$, $w_1 = -1$, $|w_n| < |w_{n+1}|$, $|w_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$; on pose $d_n = \log |w_{n+1}/w_n|$, $e_n = \min(d_n, d_n^2)$. Si $f(z)$, holomorphe

dans $|z| < 1$, vérifie $|f(0)| < 1$ et ne prend aucune des valeurs w_n , on a

$$\log M(\varrho) < 2 \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho} + \sum_{i=1}^n e_i + 30$$

lorsque $|w_n| < M(\varrho) < |w_{n+1}|$. — Pour montrer la précision de ce résultat, l'Aut. construit une fonction $f(z)$ pour laquelle

$$\log M(\varrho) > 2 \log \frac{1+\varrho}{1-\varrho} + \log |f(0)| + \frac{e^{-8\pi}}{250} \sum_{i=1}^n e_i - 30\pi$$

lorsque la suite w_n , formée de nombres réels négatifs, est donnée, ainsi que $f(0)$.

— Cas particulier intéressant lorsque $\sum_{i=1}^{\infty} d_i^2 < \infty$, soit $\sum_{i=1}^{\infty} e_i < \infty$. *Dufresnoy*.

Calderón, A. P., A. Ginzález Domínguez und A. Zygmund: Note über die Randwerte analytischer Funktionen. *Rev. Un. mat. Argentina* **14**, 16—19 (1949) [Spanisch].

Verff. zeigen: Eine im Innern des Einheitskreises analytische Funktion, deren Funktionswerte im Kreisinnern den Absolutwert < 1 haben, während diese Absolutwerte auf einem offenen Teilkreisbogen des Einheitskreises mit Ausnahme einer Menge vom Maße null sich bei radialer Annäherung dem Werte 1 nähern, hat die Eigenschaft, daß entweder die Bilder dieser Grenzwerte den Einheitskreis in der Bildebene unendlich oft überdecken oder die Funktion über den Bogen hinaus analytisch fortsetzbar ist. — Hieraus schließen Verff., daß die Grenzwerte bei

radialer Annäherung für ein Blaschkeprodukt $e^{i\alpha} z^m \prod_0^{\infty} \frac{\bar{a}_k (a_k - z)}{a_k (1 - \bar{a}_k z)}$ den Umfang

des Einheitskreises unendlich oft erfüllen.

Holzer (Graz).

Schwartz, Marie-Helene: Sur les indices de ramification de M. Nevanlinna. *C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 45—46 (1949).

Eine Riemannsche Fläche, deren Windungspunkte sich auf endlich viele Spurpunkte projizieren, sei durch Näherungsflächen ausgeschöpft, welche der Ahlforschen Bedingung $\lim L/S = 0$ genügen. Verf. beweist, daß die totale Verzweigkeit von F [R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin 1936, S. 301 bis 305; dies. Zbl. **14**, 163] dann gleich 2 ist. Weiter gibt sie Beispiele, welche zeigen, daß $\lim V > 2$ in parabolischem und $V = 2$ in hyperpolischem Fall sein kann, wo V die Nevanlinnasche mittlere Verzweigkeit von F ist [l. c. 296—301].

V. Paatero (Helsinki).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Lewy, Hans: On the convergence of solutions of difference equations. *Studies Essays, pres. to R. Courant*, 211—214 (1948).

Lösungen $u(x, y, z)$ der Differenzengleichung $u_{zz} = u_{xx} + u_{yy}$ (1) werden untersucht. Die Spannen sind h, k, l (bezüglich x, y, z), und es ist z. B. $u_z = l^{-1} [u(x, y, z + l/2) - u(x, y, z - l/2)]$. Der Ansatz $u = \exp [i(\alpha x + \beta y + \gamma z)]$ führt zu einer Bedingungsgleichung zwischen $h, k, l, \alpha, \beta, \gamma$, die für beliebig angesetzte reelle h, k, l, α, β dann immer eine reelle Lösung γ hat, wenn $l^{-2} \geq h^{-2} + k^{-2}$ (2) ist. (2) findet eine anschauliche Deutung. Soll u außer (1) noch den Bedingungen $u(x, y, 0) = f(x, y)$ und $u_z(x, y, 0) = 0$ (3) genügen, wobei $f(x, y)$ gewisse Voraussetzungen erfüllt, so ist

$$(4) \quad u = \int_{-\infty}^{+\infty} \int g(\alpha, \beta) \{ \exp [i(\alpha x + \beta y + \gamma z)] + \exp [i(\alpha x + \beta y - \gamma z)] \} d\alpha d\beta,$$

wobei $2g(\alpha, \beta)$ sich als Fouriertransformation von $f(x, y)$ (im Fall $z = 0$) erweist. — Gehen die Spannen h, k, l unter Innehaltung der Ungleichung (2) gegen Null, so wird (1) zur analogen Differentialgleichung, die Nebenbedingungen (3) modifizieren

sich entsprechend und die Lösungen (4) konvergieren gegen die Lösung dieses infinitesimalen Problems, welche mit (4) formal übereinstimmt, wobei $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ gesetzt werden muß.

Töpfer (Köln).

Cafiero, Federico: Sui problemi ai limiti relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine e dipendente da un parametro. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 239—257 (1949).

K. Zawischka [Mh. Math. Physik 37, 103—104 (1930)], S. Takahashi [dies. Zbl. 11, 389] und, unter allgemeineren Voraussetzungen, G. Zwirner haben zwei Randwertprobleme bezüglich der vom Parameter λ abhängigen Differentialgleichung $y' = \lambda f(x, y)$ untersucht, und E. Magenes und G. Stampacchia haben kürzlich bemerkenswerte Beiträge zum Studium analoger Probleme bezüglich der Gleichung $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ geliefert. — Verf. beweist, gestützt auf die Halbstetigkeit des Maximal- und Minimalintegrals einer Differentialgleichung bezüglich des Parameters λ , immer unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, mittels einfacher Überlegungen zwei Sätze über die Existenz wenigstens einer absolut stetigen Lösung $y_\lambda(x)$ des Systems

$$y'_\lambda = f(x, y_\lambda(x), \lambda), \quad y_\lambda(x_1) = \varphi(\lambda), \quad \psi(y_\lambda(x_2), \lambda) = 0$$

und spricht zwei Eindeutigkeitssätze für dieses System aus. Giovanni Sansone.

Wintner, Aurel: On almost free linear motions. Amer. J. Math. 71, 595—602 (1949).

Jede Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + f(t)x = 0$ geht für $t \rightarrow \infty$ über in eine gleichförmige Bewegung: $x = y + o(1)$ mit $y = c_1 t + c_2$, wenn $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ in der Weise abnimmt, daß $F(t) = \int_t^\infty f(s) ds$ konvergiert und, wenn man

$G(t) = \max_{s \geq t} |F(s)|$ setzt, auch $H(t) = \int_t^\infty G(s) ds$ konvergiert. Diese beiden

Bedingungen der Existenz von $F(t)$ und $H(t)$ sind hinreichend und bei schließlich konstantem Vorzeichen der Funktion $f(t)$ auch notwendig. Sie sind schwächer als die Bedingungen, die sich aus einer Untersuchung von Bôcher [Trans. Amer. math. Soc. 1, 40—52 (1900)] ableiten und absolute Konvergenz von $F(t)$ verlangen. — Durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen läßt sich zu jeder Asymptote y eine Lösung der Differentialgleichung bestimmen, die diesem y zustrebt.

Bödewadt (Montmorency).

Mitrinovitsh, Dragoslav: À propos d'une note de M. D. Pompeiu relative à l'équation de Riccati. Acad. Roumaine, Bull. Sect. sci. 30, 256—263 (1947).

L'A. nota che due osservazioni di D. Pompeiu [questo Zbl. 24, 339] relative all'equazione di Riccati $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ (1) rientrano nella seguente proprietà: la (1) si muta in una equazione della medesima forma ove si effettui un cambiamento della variabile indipendente x in u e della funzione incognita y in v definito dalle relazioni $x = P(u)$, $y = [Q(u)v + R(u)]/[S(u)v + T(u)]$ con P, Q, R, S, T funzioni note di u tali che $P'(u) \neq 0$, $QT - RS \neq 0$. Giovanni Sansone.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

• **Finikov (Finikoff), S. P.:** Die Methode der äußeren Formen von Cartan in der Differentialgeometrie. Theorie der Verträglichkeit von Systemen von Differentialgleichungen in vollständigen Differentialen und in partiellen Ableitungen. Moskau-Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1948. 432 S., R. 21.50 [Russisch].

In vielen während der letzten Jahre in Rußland ebenso wie in anderen Ländern verfaßten Abhandlungen zur höheren Differentialgeometrie ist die hierfür besonders gut geeignete Methode

der Differentialformen mit alternierender Multiplikation von Cartan benutzt worden. Das vorliegende Buch gibt nun eine ausführliche Begründung dieses Kalküls der Differentialformen, um die Gewöhnung daran weiter zu verbreiten. Dem deutschen Leser ist besonders die Schrift von Kähler „Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialformen“ (Leipzig-Berlin 1934; dies. Zbl. 11, 161) bekannt, in der in sehr gedrängter Form gleichfalls der Kalkül der Differentialformen mit seiner Anwendung auf das Problem der Lösung des allgemeinen Systems von Differentialgleichungen behandelt worden ist. Das vorliegende Buch behandelt nun, kurz gesagt, in wesentlichen Teilen den gleichen Stoff wie das Kählersche, jedoch in viel breiterer Darstellung und mit stärkerem Eingehen auf die Anwendungen in der Differentialgeometrie. Das erste Kapitel behandelt den bekannten Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski und die viel weiter gehenden Existenzsätze von Riquier und Thomas. Die nächsten Kapitel bringen dann die Theorie der Differentialformen, zunächst der Pfaffschen, sodann aber auch der allgemeineren mit den zugehörigen Integralsätzen. Nach den vollständig integrierbaren Typen Pfaffscher Formen werden dann die Systeme in Involution, reguläre Ketten von Integralelementen, Fortsetzung eines Systems nach Cartan sowie die allgemeine Charakteristikentheorie behandelt. Wichtig sind vor allem die Anwendungen auf die Differentialgeometrie, wovon wir nur das im Buch behandelte Problem der Bestimmung einer Mannigfaltigkeit zu gegebenem quadratischem Bogenelement erwähnen; der letzte Paragraph enthält dann eine Darstellung der Cartanschen Methode des beweglichen n -Beins. Bureau (Hamburg).

Bunickij, Evžen: Remarque à l'article „Sur l'intégration des différentielles totales“. Časopis Mat. Fysiky, Praha 72, 131–135 und franz. Zusammenfassg. 136 (1947) [Tschechisch].

Considérons l'équation (2) $dU = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$, où les X_i sont des fonctions homogènes du degré k satisfaisant aux conditions (3) $\partial X_i / \partial x_j = \partial X_j / \partial x_i$ ($i, j = 1, \dots, n$). Si $k \neq -1$, l'intégrale de (2) est donnée par (5) $U = (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n) / (k+1) + C$, $C = \text{const.}$ et l'équation (2) la plus générale de ce genre est de la forme (14) $dU = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial x_i) dx_i$, où $f(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction homogène quelconque du degré $k+1$. Pour $k = -1$, les choses sont plus compliquées: la forme la plus générale de l'équation (2) est donnée par (11) $dU = d(A \log |x_1|) + \sum_{v=2}^n (\partial \psi / \partial u_v) du_v$, où A est une constante quelconque et où $\psi(u_2, \dots, u_n)$ est une fonction arbitraire; les u_v, du_v sont définis par (6) $u_v = x_v / x_1$ ($v = 2, 3, \dots, n$). L'intégration de (2) pour $k = -1$ exige donc l'intégration d'une différentielle totale (10) $\sum_{v=2}^n q_v(u_2, \dots, u_n) du_v$ (à $n-1$ variables) qui peut être absolument arbitraire. (On suppose partout la continuité des dérivées partielles rentrant dans le calcul.) [V. l'article de l'A., Časopis Mat. Fysiky, Praha 57, 87–94 (1928). Rédaction.] (Autoreferat.)

Asgeirsson, Leifur: Über Mittelwertgleichungen, die mehreren partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung zugeordnet sind. Studies Essays, pres. to R. Courant 7–20 (1948).

Verf. hat in seiner Dissertation [Math. Ann., Berlin 113, 321–346 (1936); dies. Zbl. 15, 18] den folgenden Satz bewiesen: Es sei $U(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ eine reguläre Funktion im Bereiche $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \leq l$ ($l > 0$), welche der Differentialgleichung $\sum_{i=1}^n (U_{x_i x_i} - U_{y_i y_i}) = 0$ (*) ($U_{x_i x_i} = \partial^2 U / \partial x_i^2$) genügt; dann ist der Mittelwert von $U(x_1, \dots, x_n; 0, \dots, 0)$ auf der Kugel $\sum_{i=1}^n x_i^2 = l^2$ gleich dem Mittelwert von $U(0, \dots, 0; y_1, \dots, y_n)$ auf der Kugel $\sum_{i=1}^n y_i^2 = l^2$. — In dieser Arbeit skizziert Verf. ein Verfahren, wonach ähnliche Mittelwertsätze für Funktionen anwendbar sind, welche einer partiellen Differentialgleichung vom Typus (*) nicht genügen. Das Wesen des Verfahrens besteht darin, daß mit Hilfe geeigneter Transformation eine neue Funktion U hergestellt wird, welche einer Gleichung der Art (*) genügt. Dann ist der zitierte Satz anwendbar auf U , und so kann man auch bezüglich u gewisse Mittelwertsätze gewinnen. Das Verfahren wird an einigen Beispielen illustriert. St. Fenyő (Budapest).

Nordon, Jean: Sur une solution nouvelle de l'équations de Fourier. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 167—168 (1949).

G. Ribaud ha dimostrato che l'equazione di Fourier $a^2 \partial^2 \theta(x, t) / \partial x^2 = \partial \theta / \partial t$ ammette una soluzione del tipo $\theta(x, t) = t^m f(z)$ (con $z = x(4a^2 t)^{-1/2}$) purchè la $f(z)$ soddisfi la equazione: (1) $f'' + 2zf' - 4mf = 0$. L'A. dimostra che le soluzioni di (1) si possono esprimere, per qualunque valore di m , mediante le cosiddette funzioni di Weber, e può così costruire la soluzione dell'equazione di Fourier, nel semispazio $x > 0$ e per valori positivi di t , supponendo $\theta(x, 0)$, $\partial \theta(0, t) / \partial x$ rispettivamente proporzionali ad una potenza (anche non intera) di x e di t . *Graffi*.

Aubert, Marius: Sur une solution de l'équation de Fourier. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 816—817 (1949).

L'A. dimostra che alcune soluzioni dell'equazione differenziale di Ribaud [cfr. la (1) della nota precedente] si possono esprimere, quando $2m$ è intero negativo, mediante i polinomi di Hermite. Costruisce poi, esprimendole mediante serie o integrali definiti, due soluzioni particolari della predetta equazione differenziale.

Graffi (Bologna).

Agostinelli, Catoldo: Sul problema di Cauchy per l'equazione differenziale delle piastra vibranti. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **26**, 26—41 (1947).

Die zweidimensionale Schwingungsgleichung

$$\Delta(\Delta w) + \frac{1}{k^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

einer in der xy -Ebene unendlich ausgedehnten elastischen Platte wird zurückgeführt auf ein System von 2 Differentialgleichungen

$$\Delta w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta v - \frac{1}{k^2} \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Hierbei sind w und v Real- und Imaginärteil der Lösung von $\Delta u - \frac{i}{k^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ($i = \sqrt{-1}$). Eine Lösung dieser Gleichung in Integralforn wird mittels der Methode der Separation der Variablen erhalten. — Diese Lösung gestattet die Anpassung an die vorgeschriebenen Anfangswerte $w = \varphi(x, y)$ und $\partial w / \partial t = w_0(x, y)$ für $t = t_0$ in einfacher Weise. Eine Potenzreihenentwicklung für w nach Potenzen von $t - t_0$ wird gegeben und die vorher erhaltenen Ergebnisse auf den Fall einer rechteckigen und kreisförmigen Platte angewendet. *Oberhettinger* (Pasadena).

Leja, F.: Une condition de régularité et d'irrégularité des points frontière dans le problème de Dirichlet. Ann. Soc. Polonaise Math. **20**, 223—228 (1948).

On dit qu'un ensemble fermé borné F du plan possède la propriété V en un point z_0 si à toute suite de polynomes $P_n(z)$ de degré égal à l'indice, de module uniformément borné sur F , et à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un voisinage de z_0 sur lequel $P_n(z) (1 + \varepsilon)^{-n}$ soit uniformément borné. Prenant alors pour F la frontière d'un domaine connexe D qui contient le point à l'infini, et utilisant sa construction de la fonction de Green de D avec le point à l'infini pour pôle, à l'aide des „polynomes extrémaux de Lagrange“, l'A. établit que la propriété V en un point z_0 de F est nécessaire et suffisante pour la régularité de z_0 (au sens du problème de Dirichlet relatif à D). — Signalons une note sensiblement contemporaine de P. Lelong [Sur une propriétésimple des polynomes, C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 883—885 (1947)], dans laquelle le résultat ci-dessus est établi par une méthode pouvant s'adapter à l'espace, ce qui permet de vérifier l'exactitude de l'hypothèse suivante, donnée comme probable par l'A. à la fin de son article: Dans R^3 , F et D ayant des significations analogues, on obtient encore un critère (nécessaire et suffisant) de régularité pour un point frontière P_0 de D en remplaçant la propriété V par la suivante: A toute suite de fonctions de la forme $\Phi_n(P) = C_n - \sum_{k=1}^n (1/PP_k^{(n)}) [P_k^{(n)} \in F, C_n = \text{constante}]$

uniformément bornées supérieurement sur F , et à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un voisinage de P_0 sur lequel $\Phi_n - n\varepsilon$ soit uniformément bornée supérieurement.

J. Deny (Strasbourg).

Jacob, Caius: Sur un problème mixte pour le plan muni de coupures rectilignes alignées. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 355—357 (1949).

Im Anschluß an die Lösung des Dirichletschen Problems für die mehrfach längs der reellen Achse geschlitzte Ebene durch den Verf. [Mathematica, Cluj **19**, 106 (1943)] und den Ref. [dies. Zbl. **30**, 32] wird eine gemischte Randwertaufgabe behandelt: auf der ebenso geschlitzten Ebene wird eine reguläre Funktion $F(z) = u + iv$ gesucht, wobei auf gewissen Schlitzten u , auf den restlichen v gegeben ist.

H. Hornich (Graz).

Epstein, Bernard: A method for the solution of the Dirichlet problem for certain types of domains. Quart. appl. Math. **6**, 301—317 (1948).

Considérons deux domaines plans disjoints limités par quelques arcs assez réguliers, dont une partie α commune. On suppose connues les fonctions de Green de D_1 , D_2 et on veut résoudre le problème de Dirichlet pour le domaine réunion de D_1 , D_2 , α . La question revient à déterminer la valeur de la solution u sur α , ce que l'A. ramène à la résolution d'une équation de Fredholm portant sur la fonction u de l'abscisse sur α . Cette équation qui présente des singularités l'écartant du type classique est résolue par approximations successives. L'approximation est discutée pour les applications numériques exécutées en détail pour le cas du plan pourvu de fentes situées sur une même droite.

Brelot (Grenoble).

Heilbronn, H. A.: On discrete harmonic functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 194—206 (1949).

Verf. untersucht, wie weit die klassischen Sätze über harmonische Funktionen sich auf „diskret harmonische Funktionen“ übertragen lassen. Als solche definiert er Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$, die der Gleichung

$$2n f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=1}^n \{f(x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, x_v + 1, x_{v+1}, \dots, x_n) + f(x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, x_v - 1, x_{v+1}, \dots, x_n)\}$$

in einem endlichen oder unendlichen Gebiet genügen. Unter Gebiet ist dabei eine gewisse Menge einander benachbarter Gitterpunkte verstanden, wobei die Gitterpunkte in innere und in Randpunkte eingeteilt werden. Eine nicht konstante diskret harmonische Funktion nimmt in einem Gebiet ihr Maximum nur in einem Randpunkt an; es wird ein dem Dirichletschen Prinzip genau entsprechendes Prinzip für diskret harmonische Funktionen aufgestellt. Es gibt für

$k \geq 1$ genau $\binom{k-2+n}{n-1} \frac{2k+n-1}{k}$ voneinander linear unabhängige, diskret harmonische

Polynome von höchstens k -tem Grade. Für $n = 2$ ist jede in einem Quadrat diskret harmonische Funktion ein Polynom. Für $n = 2$ können die Gebiete in Klassen eingeteilt werden, je nachdem beliebige diskret harmonische Funktionen über das Gebiet hinaus bis zu einem Quadratgebiet analytisch fortgesetzt werden können oder nicht. Dem Liouvilleschen Satz entspricht hier: Eine überall beschränkte, diskret harmonische Funktion ist eine Konstante. Wenn eine Funktion f überall beschränkt ist und diskret harmonisch überall mit Ausnahme einer Gitterpunktsstelle, so ist f im Fall $n = 2$ eine Konstante, im Falle $n = 3$ braucht f aber nicht konstant zu sein, wie an einem Beispiel gezeigt wird. Es sei S ein unendliches Gebiet mit mindestens einem Randpunkt; ist F eine beschränkte, in allen Randpunkten definierte Funktion, so gibt es eine in allen Punkten von S beschränkte, diskret harmonische Funktion, die in Randpunkten mit F übereinstimmt; sie ist für $n = 2$ eindeutig, für $n > 2$ im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt. Die Bedingung der Beschränktheit kann hier in Voraussetzung und Behauptung auch fortfallen. Es folgen einige Abschätzungen und ein Analogon zur Poissonschen Formel.

Collatz (Hannover).

Verblunsky, S.: A theorem on positive harmonic functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 207—212 (1949).

Im Einheitskreis $|z| = r < 1$ sei $h(z)$ regulär-harmonisch und positiv. Verf. zeigt $\lim_{r \rightarrow 1} h(r)/(1-r) = \lim_{z \rightarrow 1} h(z)/(1-r)$ und $\lim_{r \rightarrow 1} h(r)(1-r) = \lim_{z \rightarrow 1} h(z)(1-r)$.

Ist der erste Grenzwert endlich, so ist der entsprechende Grenzwert für eine geeignet gewählte Konjugatfunktion von h sogar Null. Verf. gibt überdies neue Beweise für Sätze von Carathéodory und Herzig. *G. af Hällström* (Åbo).

Deny, Jacques et Pierre Lelong: Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône. *Bull. Soc. math. France* **75**, 89—112 (1947).

Les AA. perfectionnent et étendent des résultats sur les fonctions sousharmoniques, comme le suivant de Hardy et Rogosinski: u sousharmonique bornée supérieurement dans une demi-bande plane parallèle à oy admet pour $y \rightarrow \infty$ une $\lim. \sup.$ qui est $-\infty$ ou convexe de x . Les AA. renvoient le sujet en utilisant les résultats les plus récents sur la convergence des fonctions sousharmoniques complétés par quelques lemmes comme le suivant: pour qu'un ensemble cylindrique soit de capacité extérieure nulle dans l'espace R^p il faut et suffit que la section droite soit de capacité extérieure nulle dans R^{p-1} . Le résultat central concerne, dans R^p u sousharmonique dans un demi-cylindre [$x_p > 0$, $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in D$ domaine]. Si u est bornée supérieurement, $\lim. \sup.$ est dans D , $-\infty$ ou quasi-sousharmonique.

Si sur l'ensemble des points-frontière à distance finie, la $\lim. \sup.$ en chaque point est $\leq A$ et si u est partout majorée par $\varepsilon(x_p) e^{\sqrt{\lambda} x_p}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ avec $1/x_p$, λ première valeur > 0 pour laquelle $\Delta U + \lambda U = 0$ admet dans D alors borné et assez régulier une solution > 0 s'annulant à la frontière), alors $u \leq A$. Cela est diversement complété en particulier par des théorèmes d'uniformité, par une généralisation des fonctions sousharmoniques ou sousmédianes, et par une étude similaire faite dans un cône. *Brelot*.

Duffin, R. J.: On a question of Hadamard concerning superbiharmonic functions. *J. Math. Physics, Massachusetts* **27**, 253—258 (1949).

Le problème suivant est suggéré par l'étude de l'équilibre d'une plaque élastique encastrée: Si une solution $w(x, y)$ de l'équation $\Delta \Delta w = \varrho$ [où $\varrho = \varrho(x, y)$ est une fonction non négative donnée] est nulle ainsi que ses dérivées du premier ordre à la frontière d'un domaine D du plan, a-t-on $w \geq 0$ dans D ? L'A. donne un contre-exemple en prenant pour D la bande infinie $|y| < 1$ et pour ϱ une fonction ne dépendant que de x , nulle hors d'un intervalle fini; la transformation de Fourier permet alors un calcul explicite de la solution w . L'article se termine par quelques remarques dans le cas d'une bande rectangulaire de longueur finie. *J. Deny*.

Integraltransformationen:

Schoenberg, I. J.: Some analytical aspects of the problems of smoothing. *Studies Essays, pres. to R. Courant*, 351—370 (1948).

Im ersten Teil wird für die Koeffizienten $L_\nu^{(n)}$ der n -fachen Iterierten der Transformation $y'_m = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L_\nu y_{m-\nu}$ mit $L_{-\nu} = L_\nu$ und $\sum L_\nu = 1$ die bei $n \rightarrow \infty$ in ν gleichmäßig geltende Formel

$$L_\nu^{(n)} = (an)^{-1/(2k)} (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{2k}} \cos [t\nu (an)^{-1/(2k)}] dt + o(n^{-1/(2k)})$$

abgeleitet. Und zwar, falls a) $\varphi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L_\nu e^{i\nu u}$ in $|\Im u| < \log \varrho$ mit $\varrho > 1$ regulär ist, b) die Entwicklung $1 - au^{2k} + \dots$ besitzt und c) $|\varphi(u)| < 1$ für $0 < u < 2\pi$, insbesondere also $a > 0$ ist. Bedingung b) sichert, daß bei der Transformation äquidistante Ordinaten von Polynomen nicht höher als $(2k-1)$ -ter Ordnung erhalten bleiben und c) bildet eine Verschärfung der vom Verf. früher gefundenen Glättungsbedingung $|\varphi(u)| \leq 1$ für $0 \leq u \leq 2\pi$. — Im zweiten Teil wird im Falle a) als notwendig und hinreichend dafür, daß die Faltungstranfor-

mation $y'_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} L_{n-\nu} y_\nu$ Vorzeichenwechsel vermindernd sei, die Bedingung gefunden, daß die vierfach unendliche Matrix $\|L_{i-j}\|$ der notwendigerweise vorzeichenbeständigen, etwa nichtnegativen Folge $\{L_n\}$, nichtnegative Minoren besitzt. Verschiedene bekannte Fälle solcher durch a) normierten totalpositiven Folgen umfassend läßt sich zeigen, daß bei positivem c , ganzzahligem m , nichtnegativen $\alpha, b, \alpha_\nu, \beta_\nu, 0 \leq \gamma_\nu \leq 1, 0 \leq \delta_\nu < 1$ mit konvergenten $\Sigma \alpha_\nu, \Sigma \beta_\nu, \Sigma \gamma_\nu, \Sigma \delta_\nu$, die Koeffizientenfolge der Laurentschen Entwicklung von

$$cz^m e^{az + b/z} \Pi(1 + \alpha_\nu z) \Pi(1 + \beta_\nu/z) / [\Pi(1 - \gamma_\nu z) \Pi(1 - \delta_\nu/z)]$$

mit $\nu = 1, 2, \dots$ um $z = 0$ normiert totalpositiv ist. Es wird vermutet, daß dieser Satz sich umkehren läßt.

Szentmártony (Budapest).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• Hille, Einar: Functional analysis and semi-groups. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31). New York: American Mathematical Society, 1948. XI, 528 p. \$ 7.50.

An abstract semi-group is a system of elements in which an associative multiplication is defined. The main importance of this concept does not seem to lie in the algebraic field, but rather in the applications to analysis where topological semi-groups and in particular one-parameter semi-groups of linear transformations of a function space to itself come up in the most diversified connections. For such semi-groups, topological and analytical methods are available and a fairly rich theory results. The author has great merits in having laid the foundations of, and developed with much success, this new mathematical discipline. The present book is the first monography on the subject. It is divided in three parts and an appendix. — Part one presents an elaborate introduction to modern functional analysis with special emphasis on function theory in Banach spaces and Banach algebras (a Banach algebra is a Banach space in which an associative multiplication of the elements is defined such that $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$). This part is a valuable continuation of Banach's fundamental monography. A very detailed discussion is given of the different kinds of extension of the Lebesgue integral to functions of a real variable whose values are vectors in Banach space. Functions of vectors to vectors of complex Banach spaces are investigated as regards differentiability and analyticity (Fréchet and Gâteaux differentials and recent contributions of Michal, Highberg, Martin, A. E. Taylor, Zorn etc.). A chapter is devoted to analysis in Banach algebras \mathfrak{B} with unit element e . The central problem is the resolvent $(\lambda e - x)^{-1}$, the spectrum and the extension of analytic scalar functions from the scalar field to the algebra. The key is yielded by the formula $f(x) =$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} f(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \Gamma_x \text{ consisting of a finite number of oriented rectifiable curves passing}$$

in the resolvent set of the element x and surrounding the spectrum of x . In the case when \mathfrak{B} is the algebra of bounded linear transformations of Hilbert space, this formula has been introduced by F. Riesz in his book Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Paris 1913); it is fundamental also in recent researches on normed vector rings and on spectral theory (Gelfand, Lorch, Dunford, etc.). — Part two is devoted to the analytical theory of semi-groups. Two chapters contain prefatory material, the first dealing with subadditive functions [characterized by the inequality $f(t_1 + t_2) \leq f(t_1) + f(t_2)$ and investigated as regards their boundedness, rate of growth, continuity and differentiability properties, measurability being always supposed], the second with semi-modules, i.e. additive abelian semi-groups, in particular those contained in an n -dimensional vector space (work due essentially to the author and M. Zorn). It follows the study of addition theorems of the form $F(x + y) = G[F(x), F(y)]$ where G is a given analytic function of two complex variables and $F(x)$ is to be determined as a function from a given Banach space to a given complex Banach algebra. The particular case $G(u, v) = uv$ leads to the main theme of the work: the study of bounded linear transformations $T(\xi)$ ($\xi > 0$) of a Banach space such that $T(\xi_1) T(\xi_2) = T(\xi_1 + \xi_2)$. Measurability assumptions assure continuity in the parameter for $\xi > 0$ (Dunford), but $\lim_{\xi \rightarrow 0} T(\xi)$ need not exist. If it exists (in the strong sense), then the „infinitesimal generator“ $A = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-1} [T(\xi) - I]$ exists also as

an everywhere densely defined bounded or unbounded transformation. If A is bounded, it „generates“ $T(\xi)$ by the relation $T(\xi) = \exp(\xi A)$, the exponential function being defined e.g. by its power series. If A is unbounded, the power series method fails, but one has always $T(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \exp(\xi A_\eta)$ where $A_\eta = \eta^{-1} [T(\eta) - I]$, („first exponential formula“). Using as

tools different inversion formulas for Laplace integrals, one obtains further „exponential formulas“ connecting $T(\xi)$ and A , such as: $(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{\infty} \exp(\lambda \xi) T(\xi) d\xi$,

$$T(\xi) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \exp(\lambda \xi) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[I - \frac{\xi}{k} A \right]^{-k}. \quad \text{Sufficient conditions}$$

are then stated for a linear transformation A in order that it be the infinitesimal generator of some semi-group $T(\xi)$, such a condition being that A is densely defined, closed, its spectrum located in the half plane $\Re(\lambda) = \sigma \leq 0$ and that $\|[(\sigma + i\tau)I - A]^{-1}\| \leq \sigma^{-1} + \beta\sigma^{-2}$ with constant $\beta \geq 0$. The corresponding problems are considered also in the case in which the parameter manifold is a „positive cone“ in a finite or infinite dimensional Banach space. If $T(\xi)$ is a holomorphic function of ξ , then it admits of a holomorphic continuation $T(\zeta)$ on a semi-module of complex numbers $\zeta = \xi + i\eta$, the relation $T(\zeta_1)T(\zeta_2) = T(\zeta_1 + \zeta_2)$ being preserved. The maximal domain of existence, growth properties of the norm, etc. are studied at length, using tools from the theory of analytic functions (theorems of Phragmén, Lindelöf, Pólya etc.). — In the general case, the semi-group operator $T(\xi)$ does not have any limit for $\xi \rightarrow 0$ or ∞ , but it has a Cesàro or Abel limit under fairly general assumptions, and these methods of summations are connected by theorems of Tauberian kind.

The $(C, 1)$ -limit $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} T(\tau) d\tau$ being the subject of the so-called „mean“ ergodic theorems,

these investigations give rise to a generalization of ergodic theory. This theory is based upon properties of the resolvent of the infinitesimal generator. — For an (in general unbounded) A which is the infinitesimal generator of a semi-group $T(\xi)$, one can build up an operational cal-

culus based on the formulas $f(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(\lambda \xi) d\beta(\xi)$, $f(A) = \int_0^{\infty} T(\xi) d\beta(\xi)$; this calculus

and in particular its spectral properties are studied in detail. — Part two closes with some asymptotical estimates of $\|T(\xi) - I\|$ for $\xi \rightarrow 0$ and with the study of the boundary values, on the line $\xi = 0$, of a semi-group $T(\xi + i\eta)$, holomorphic in the half-plane $\xi > 0$. — Part three, entitled „Special semi-groups“, deals with a great variety of topics, thus fully justifying the importance of the semi-group concept in analysis. (The author says in the foreword: „I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere!“) The main topics treated are the following: Translations and powers (semi-groups $T(\xi)f(t) = f(t + \xi)$ and $T(\xi)f(t) = [g(t)]^{\xi}f(t)$ in different function spaces), trigonometric semi-groups ($f(t) \sim \sum a_n e^{int}$, $T(\xi)f(t) \sim \sum e^{-\lambda_n \xi} a_n e^{int}$); semi-groups in $L_p(-\infty, \infty)$ [in particular the case when $T(\xi)f$ results by transforming the Hermitian series of f by the factors $e^{-\lambda_n \xi}$ or else the Fourier transform of f by the factor-function $e^{-\lambda(u)\xi}$]; semi-groups in Hilbert space [the Sz.-Nagy-Hille spectral

representation $T(\xi) = \int_0^m \lambda^{\xi} dE_{\lambda}$ of self-adjoint semi-group operators]; semi-groups arising in Abel summation, Hausdorff summation, stochastic processes and fractional integration of Riemann-Liouville or M. Riesz type. Linear partial differential equations of mathematical physics yield a rich domain of applications: the „law of causality“, or, more precisely, the „major premise of Huygens' principle“ as formulated by Hadamard appeals precisely to the semi-group property as regards the parameter t (time). — There is a large appendix treating some very recent results on the more algebraic aspects of the theory of Banach algebras (due to Gelfand, Neumark, Šilov, Jacobson, Kaplansky, Segal, etc.). — Hille's work will undoubtedly influence and help in a large extent the modern and very fruitful tendency of the algebraization of the analysis. Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Rochlin, V.: Die „allgemeine“ Transformation mit invariantem Maß ist keine Durchmischung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 349—351 (1948) [Russisch].

Soit I le segment $(0, 1)$ muni de la mesure de Lebesgue. Dans l'ensemble \mathfrak{A} des classes d'automorphismes de I , on peut introduire une topologie: un voisinage de l'automorphisme unité est l'ensemble des automorphismes qui ne modifient un ensemble mesurable $E \subset I$ que d'un ensemble de mesure $< \varepsilon$; \mathfrak{A} est alors un espace métrique complet. P. R. Halmos [Ann. Math., Princeton, II. S. 45, 784 (1944)] a démontré que, dans \mathfrak{A} , les automorphismes qui sont du „Mischungstypus im weiteren Sinne“ forment un G_{δ} partout dense. L'A. démontre que les automorphismes, qui sont du „Mischungstypus im engeren Sinne“ forment dans \mathfrak{A} un ensemble de première catégorie, en sorte que les automorphismes qui appartiennent à la première classe sans appartenir à la seconde forment dans \mathfrak{A} une „majorité écrasante“, comme dit l'A.

R. Godement (Nancy).

Zaanan, A. C.: Note on a certain class of Banach spaces. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 488—498 (1949).

Bekanntlich sind die Funktionenräume L_p für $1 < p < \infty$ Spezialfälle folgenden, von Orlicz [Bull. internat. Acad. Polonaise Sci. Lett., Cl. Sci. math. natur. A Nr. 8/9, 207—220 (1932); dies. Zbl. 6, 315] eingeführten Raumbegriffs: Es sei $\bar{v} = \varphi(\bar{u})$ eine stetige, streng wachsende Funktion für $\bar{u} \geq 0$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim_{\bar{u} \rightarrow \infty} \varphi(\bar{u}) = \infty$,

$\bar{u} = \varphi(\bar{v})$ sei die zu ihr inverse Funktion. Wenn man $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(\bar{u}) d\bar{u}$ und $\Psi(v) = \int_0^v \varphi(\bar{v}) d\bar{v}$ setzt, so bezeichnen wir mit $L_\Phi^*(\Delta)$ bzw. $L_\Psi^*(\Delta)$ die Klasse aller

meßbaren, komplexwertigen Funktionen $f(x)$, die auf dem Intervalle Δ des m -dimensionalen euklidischen Raumes definiert sind und für die $\int_\Delta \Phi(|f|) dx$ bzw. $\int_\Delta \Psi(|f|) dx$ endlich ist. Die Klasse $L_\Phi(\Delta)$ der meßbaren Funktionen, die auf Δ definiert sind und für die $\int_\Delta |f g| dx$ existiert für $g \in L_\Psi^*(\Delta)$, ist nun ein Banachscher Raum mit der

Norm $\|f\|_\Phi = \sup \left| \int_\Delta f g dx \right|$ für $\int_\Delta \Psi(g) dx \leq 1$. Die Definition der Klasse $L_\Psi(\Delta)$

ist ähnlich. — Der Verf. zeigt nun, daß die ganze Theorie dieser Orliczschen Räume sich auf den Fall, wo man von $\varphi(\bar{u})$ nichts anderes als Monotonität im weiteren Sinne voraussetzt, verallgemeinern läßt. Man hat nur die inverse Funktion $\varphi(\bar{v})$ in der üblichen Weise zu definieren und die Youngsche Ungleichung auf diesen Fall zu übertragen. Auch die neueren Ergebnisse des Verf. [Ann. Math., Princeton, II. S. 47, 654—666 (1946)] lassen sich leicht verallgemeinern auf diese allgemeinere Klasse von Funktionenräumen, die z. B. auch die Räume L_1 und L_∞ umfaßt. Császár.

Najmark, M. A.: Ringe von Operatoren im Hilbertschen Raum. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 83—147 (1949) [Russisch].

Le but de cet article est d'exposer — parfois sans démonstrations — l'essentiel des résultats obtenus par F. J. Murray et J. von Neumann dans la théorie des anneaux d'opérateurs. Les principales questions traitées ici sont les suivantes: 1. diverses topologies qu'on connaît sur l'anneau des opérateurs d'un espace de Hilbert séparable (y compris les deux topologies définies récemment par J. Dixmier [C. r. Acad. Sci., Paris 227, 948 (1948)]); propriétés algébriques et topologiques élémentaires des anneaux d'opérateurs; existence d'un générateur pour chaque anneau commutatif [le rapporteur met fortement en doute l'utilité pratique de ce résultat qui, dans les applications, ne peut conduire le plus souvent qu'à des résultats artificiels — par exemple à considérer la transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables comme étant une fonction (mesurable) d'une seule variable]; 2. théorie de la dimension relative dans les facteurs (anneaux dont le centre est réduit aux scalaires); classification des facteurs relativement au domaine des valeurs de la dimension relative correspondante; comparaison entre la classe d'un facteur et celle de son commutant; 3. trace dans les facteurs de classe finie (l'additivité étant démontrée ici seulement pour des opérateurs permutables, et la continuité faible seulement mentionnée au passage — ce qui est raisonnable, car dans la pratique actuelle cette propriété est toujours évidente), allusions rapides à la possibilité de définir aussi une trace dans les autres classes de facteurs; 4. représentation matricielle des facteurs non purement infinis à l'aide des facteurs de classe finie; 5. exemple de facteurs de classe finie (la construction utilisée ici consiste à considérer l'anneau engendré par les translation à gauche dans l'espace L^2 d'un groupe discret). — En ce qui concerne les démonstrations, elles ne sont pas essentiellement plus simples que celles qu'on connaissait déjà, ce qui tendrait à prouver, étant donné la personnalité de l'A., qu'il y a peu d'espoir de parvenir un jour à un exposé simple de la théorie — fait fort regrettable. Le choix des matières est dans l'ensemble excellent; toutefois, le rapporteur aurait souhaité voir figurer dans cet article une étude beaucoup plus détaillée de la trace dans les facteurs non finis; il y a en effet tout lieu de croire que, dans les applications de la théorie, cette notion est destinée à jouer un rôle beaucoup plus important que celle de dimension relative — pour la même raison que, en théorie de l'intégration, la notion d'intégrale (fonctionnelle linéaire) est pratiquement plus utile que celle de mesure (fonction d'ensemble); c'est du reste déjà visible dans les espaces de dimension finie, de même que pour les classiques opérateurs du type d'Hilbert-Schmidt, dont l'A. connaît certainement mieux que quiconque l'intérêt! Par ailleurs, l'A. ne donne qu'un seul exemple de facteurs [de classe (II_1)]; peut être eût-il été intéressant au con-

traire de multiplier les exemples concrets, qui constituent une partie non négligeable des travaux de Murray et von Neumann et qui, par ailleurs, sont indispensables si l'on veut faire comprendre l'intérêt de la théorie. — Enfin, signalons que, depuis la rédaction de cet article, la théorie des anneaux d'opérateurs a fait deux progrès considérables, à savoir: 1. la „Reduction theory“ de J. von Neumann, qui permet de montrer que tout anneau est une „somme continue“ de facteurs; 2. l'extension par Dixmier de la théorie de la trace aux anneaux qui ne sont pas des facteurs. Il y a lieu de croire que ces nouveaux résultats permettront de mieux comprendre ceux dont l'A. s'occupe, et d'élargir considérablement le champ d'application de la théorie, laquelle apparaîtra bientôt comme un instrument essentiel de l'algèbre topologique.

R. Godement (Nancy).

Nejmark, F. A.: Über die Fortsetzung eines Hermiteschen Operators zu einem mit einem gegebenen Hermiteschen Operator vertauschbaren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 9—12 (1949) [Russisch].

L'A. examine le problème suivant: soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, A un opérateur hermitien borné défini dans \mathfrak{H} , \mathfrak{M} un sous-espace fermé de \mathfrak{H} , B un opérateur hermitien borné défini dans \mathfrak{M} ; à quelles conditions peut-on trouver dans \mathfrak{H} un opérateur hermitien borné B' qui permute à A et coïncide avec B sur \mathfrak{M} ? L'A. donne deux réponses à ce problème; la première est évidente: il faut et il suffit qu'on ait $(A^k Bx, y) = (A^k x, By)$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{M}$ et l'entier $k > 0$, et qu'en outre il existe une constante C telle que $|\Sigma A^k Bx_k| \leq C \cdot |\Sigma A^k x_k|$ quels que soient les $x_k \in \mathfrak{M}$ en nombre fini. La seconde solution est plus compliquée et consiste à mettre A sous la forme de Jacobi au moyen d'un tableau de matrices convenables; mais les conditions qu'on trouve alors pour que le problème soit possible sont uniquement des relations de commutation (c'est-à-dire ne font pas intervenir la constante C ci-dessus, ni quoi que ce soit d'analogue).

R. Godement (Nancy).

Zimmerberg, H. J.: The adjoint of Euler's linear differential operator. Amer. math. Monthly 56, 332—334 (1949).

E. D. Rainville [Amer. math. Monthly 46, 623—627 (1939)] définit l'opérateur α con la condizione che se A è un operatore differenziale lineare, αA rappresenta l'operatore differenziale aggiunto di A . L'operatore α gode le due proprietà $\alpha^2[A] = A$, $\alpha[AB] = (\alpha[B])(\alpha[A])$. Se $\mathfrak{D} = x(d/dx) = xD$ è l'operatore differenziale di Eulero, si ha $x^n \mathfrak{D}^n = \mathfrak{D}(\mathfrak{D} - 1) \dots (\mathfrak{D} - n + 1)$ ($n = 1, 2, \dots$), e l'A. dimostra che se n è intero non negativo, sussistono le seguenti identità:

$\alpha[p(x)x^n \mathfrak{D}^n] = (-1)^n (\mathfrak{D} + 1)(\mathfrak{D} + 2) \dots (\mathfrak{D} + n)p(x)$, $\alpha[p(x)\mathfrak{D}^n] = (-1)^n (\mathfrak{D} + 1)^n p(x)$, dove i secondi membri indicano operatori differenziali.

Giovanni Sansone.

Bochner, S.: Diffusion equation and stochastic processes. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 368—370 (1949).

Aus der Chapman'schen Integralgleichung für einen Zufallsvorgang mit der Dichtefunktion $f(s, x; t, y)$ der Punkte x und y einer L -meßbaren Menge S und der Zeitpunkte $0 < s < t < \infty$ lassen sich ganz allgemein die Diffusionsgleichungen

$$\partial f(s, x; t, y) / \partial s = -A_s(x), \quad \partial f(s, x; t, y) / \partial t = A_t^*(y) f(s, x; t, y)$$

ableiten. Hierbei ist $A_u(z)$ ein im Punkte u wirkender linearer Operator und $A_u^*(z)$ seine Adjungierte. Bei stationären Vorgängen reduzieren sich diese Gleichungen auf die einzige $\partial f(u; x, y) / \partial u = A(x) f(u; x, y)$ mit $f(u = t - s; x, y) = f(s, x; t, y)$. In beiden treten aber noch die Bedingungen a) $f(s, x; t, y) \geq 0$,

b) $\int_S f(s, x; t, y) dv_y = 1$ hinzu. Zweck der Note ist, strukturelle Eigenschaften

der Operatoren anzukündigen, welche a) und b) sichern. — In bezug auf b) gelingt dies leicht. Bei stationären Vorgängen z. B. dadurch, daß man $A = A^*$ mit der zu $\lambda_0 = 0$ gehörenden Eigenfunktion $\varphi_0(x) = 1$ exakt oder angenähert vorschreibt. — Schwieriger ist die Lage bezüglich der Bedingung a), die im klassischen Ansatz bei stationären Vorgängen durch $A = -\Delta$, den Laplace-Beltramischen Operator, gesichert wird, aber die Beschränkung auf exakt oder angenähert Gaußsche Vorgänge nach sich zieht. Hier gelingt eine Erweiterung durch $A = \Phi(B)$, wo $\Phi(\lambda)$

in $0 \leq \lambda < \infty$ eine solche numerische Funktion bezeichnet, bei welcher $\exp[-u\Phi(\lambda)]$ vollständig monoton ist und B schon einen geeigneten Operator, wie etwa $-A$ bedeutet. Als Beispiel gilt die schon von P. Lévy gegebene Funktion $\Phi(\lambda) = \lambda^p$ mit $0 < p < 1$. Wie die Spektralzerlegung eines soeben erwähnten Operators B zeigt, führt bei den Diffusionsgleichungen nichtstationärer Vorgänge der veränderliche Operator $A_u = \Phi(u, B)$ zum Ziel. Hierbei ist $\Phi(u, \lambda)$ eine solche numerische Funktion von $0 < u < \infty$, $0 \leq \lambda < \infty$, welche für jedes feste u der vorangehenden Bedingung genügt. Oder unmittelbar A_u eine Schar von Operatoren, bei welcher $A_u A_v = A_v A_u$ ist und bei festem u einen stationären Vorgang sichert.

Szentmártony (Budapest).

Praktische Analysis:

Pollak, L. W.: Indirect autocorrelation method of searching for periodicities. Proc. Irish Acad. A 52, 143—161 (1949).

Nach der Methode von J. Fuhrich lassen sich Perioden einer zusammengesetzten periodischen Funktion oder Wertereihe durch ein „Korrelogramm“ ermitteln, das aus der Folge der Autokorrelationskoeffizienten der Funktion mit fortschreitendem Verschiebungsbetrag besteht. Verf. sucht die umständliche Berechnung der Korrelationskoeffizienten dadurch zu umgehen, daß er diese nicht direkt aus den Ordinaten der Originalreihe, sondern aus deren Fourierkoeffizienten bildet. — Diese Methode des „indirekten Korrelogramms“ hält einer kritischen Betrachtung nicht stand. Offenbar hat Verf. übersehen, daß er, indem er die Beobachtungsreihe durch ihre Fourierkonstanten ersetzt, nicht die ursprüngliche endliche Wertefolge, sondern die durch die Fouriersche Reihe dargestellte rein periodische Funktion analysiert, deren Perioden allein die harmonischen des Beobachtungszeitraumes sind. Das Verfahren kann somit nicht mehr leisten als die harmonische Analyse auch und ist daher ungeeignet, die exakte Fuhrichsche Methode (und ähnliche, die dasselbe leisten) zu ersetzen. Die numerischen und graphischen Beispiele, die der Abhandlung beigegeben sind, zeigen denn auch deutlich die erheblichen Unterschiede zwischen dem direkten (nach Fuhrich berechneten) Korrelogramm und dem indirekten. Das zeigt sich besonders kraß in den Ordinaten, aber auch in der Lage der Extrema, die ja als Kriterien für die Periodenlänge dienen sollen.

K. Stumpff (Vogelsang ü. Seesen).

Gans, J. de: Differenzenrechnung, Interpolations- und Näherungsmethoden. Verzekerings-Arch. 28, 51—135 (1949) [Holländisch].

Die für die Vorbereitung auf die Prüfung der Versicherungsmathematiker bestimmte Einführung bringt die Bestimmung der Koeffizienten ganzer rationaler Funktionen aus gegebenen Werten, also die rationale Interpolation; ferner die Anwendung der gefundenen Formeln von Newton, Gauß, Stirling, Bessel, Everatt, Lagrange auf die Interpolation tabellarisch gegebener Funktionen und auf die inverse Interpolation, also die Bestimmung des Arguments, für das eine (tabellarisch) gegebene Funktion einen gegebenen Wert annimmt; schließlich die angenäherte Differentiation und Integration mit Hilfe der gefundenen Methoden und Formeln. Die übersichtliche Arbeit enthält viele, interessante versicherungsmathematische Beispiele und Aufgaben.

Härten (München).

Jecklin, H.: Hyperbolische Interpolation. Elemente Math., Basel 4, 30—34 (1949).

Für eine gleichseitige Hyperbel $y = (ax + b)/(cx + d)$ mit achsenparallelen Asymptoten gilt für die Koordinaten x_i, y_i ($i = 0, 1, 2$) und x, y von vier Hyperbelpunkten die Doppelverhältnisgleichung

$$(1) \quad \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y} \cdot \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x} \cdot \frac{x - x_1}{x_1 - x_0}.$$

Sie läßt sich als Verallgemeinerung der linearen Interpolationsgleichung herleiten und zur Interpolation des Funktionswertes y aus drei Stützwerten y_i benutzen (Ersatz der Funktion durch die oben angeführte Hyperbel, insbesondere für monotone Funktionsintervalle). Das Verfahren ist auch graphisch anwendbar (Satz von Pascal über Kegelschnitt-Sechseck). Es ist ferner identisch mit einer bekannten nomographischen Interpolation mittels verschieblichen Strahlenbüschels. In Verallgemeinerung der Regula falsi kann man (1) auch zur Gleichungsauflösung ($y = 0, x = ?$) heranziehen. R. Zurmühl (Darmstadt).

Goodwin, E. T.: The evaluation of integrals of the form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$.

Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 241—245 (1949).

Es wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx = h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nh) e^{-n^2 h^2} - E(h)$$

gesetzt. Bei Vernachlässigung des Restgliedes $E(h)$ entsteht eine (auch bei Werten von h in der Größenordnung der Einheit) brauchbare Näherungsformel, deren Güte an verschiedenen Beispielen [$f(x) = 1, \cos x, x^2 \cos x, J_0(x), \cos ux J_0(yx)$] gezeigt wird. Durch eine hübsche Integration im Komplexen, wobei Verf. $f(x)$ als längs der reellen Achse reguläre und gerade Funktion voraussetzt, wird der Fehler $E(h)$ näherungsweise abgeschätzt zu

$$E(h) \approx 2\sqrt{\pi} e^{-\pi^2/h^2} f(i\pi/h)$$

und die Güte dieser Abschätzung an obengenannten Beispielen erprobt.

Collatz (Hannover).

Tietze, Heinrich: Zusammenstellung einiger Werte des Integrallogarithmus. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1947, 47—50 (1949).

Verf. gibt für den Integrallogarithmus $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ (Cauchyscher Hauptwert)

zwei Tafeln für die Werte $x \geq 2$ von der Gestalt $10^a b$ (a, b ganz, $0 \leq a \leq 5, 1 \leq b \leq 9$), und zwar auf 7 bzw. 4 Dezimalen.

Hlawka (Wien).

Wilkes, M. V.: Progress in high-speed calculating machine design. Nature, London 164, 341—343 (1949).

Bericht über eine Tagung im Mathematischen Laboratorium der Universität Cambridge vom 22. bis 25. Juni 1949, in der Rechenautomaten hoher Geschwindigkeit, insbesondere der EDSAC, behandelt wurden, der wesentlich kleiner als der ENIAC ist und eine größere Speicherkapazität hat. Die zukünftige Entwicklung der Rechenautomaten wird allgemein dahin gehen, kleinere Maschinen zu bauen, auch wenn dadurch die Rechengeschwindigkeit abnehmen sollte. Diskutiert wurden u. a. Vorteile und Nachteile des Einbaues besonderer mathematischer Einrichtungen für die Multiplikation, die Division, das Quadratwurzelziehen, die Einführung der Werte besonderer Funktionen usw. Dabei handelt es sich ebenso wie bei dem Einbau besonderer Kontrollen darum, ob man eine Komplikation der Maschinen oder eine solche der Rechenanweisungen vorzieht.

Willers (Dresden).

Wilkes, M. V.: Electronic calculating-machine development in Cambridge. Nature, London 164, 557—558 (1949).

Kurze Beschreibung der Einrichtungen des englischen Rechenautomaten EDSAC (Electronic delay storage automatic calculator) und der Durchführung eines einfachen Rechnungsganges mit dieser Maschine. Sie zeichnet sich dadurch aus, daß sie keiner vorherigen Einstellung bedarf, sondern daß alle Rechenanweisungen usw. während der Rechnung von einem Lochstreifen aus in die Maschine gegeben werden.

Willers (Dresden).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Friedman, Bernard: A simple urn model. Commun. pure appl. Math., New York 2, 59—70 (1949).

In einem Kasten seien a weiße und b schwarze Kugeln. Eine Kugel werde willkürlich gezogen; dann werden $1 + \alpha$ Kugeln derselben Farbe zusätzlich gezogen und β Kugeln der anderen Farbe hinzugefügt. Die charakteristische Funktion der Zahl der weißen Kugeln im Kasten nach n solchen Ziehungsprozessen und die Wahrscheinlichkeit, daß die n -te Ziehung eine weiße Kugel ist, werden allgemein berechnet. Explizit läßt sich die Lösung jedoch nur in den Fällen $\gamma = (\alpha + \beta)/(\alpha - \beta) = 0$, oder ± 1 angeben. Der Fall $\gamma = 1$; $\beta = 0$ führt auf die Polya-Eggenbergersche Wahrscheinlichkeitsverteilung der „Ansteckung“, d. h. der Zahl infizierter Fälle während einer Epidemie; der Fall $\gamma = 0$; $\alpha = -1$; $\beta = 1$ liefert das Ehrenfestsche Modell des Wärmeaustausches zwischen zwei ungleich temperierten Wärmeisolatoren, und der Fall $\gamma = -1$; $\alpha = 0$ gibt das Modell ab für eine „Unfallschutzpropaganda“. Für $\alpha = \beta = 0$ und $n \rightarrow \infty$ erhält man die Poissonsche Verteilung.

Pretsch (Frankfurt/M.-Höchst).

Fréchet, Maurice: Les valeurs typiques d'ordre nul ou infini d'un nombre aléatoire. Rev. Inst. internat. Statist., La Haye 16, 1—22 (1948).

Eine von Ch. Jordan in seiner Statistique mathématique (Paris 1927) gemachte Bemerkung prüfend, wird bei einer Zufallsveränderlichen x mit endlichem $E|x|^\alpha$ bei $\alpha > 0$ der sicherlich existierende Erwartungswert $(E|x - a|^\alpha)^{1/\alpha}$ als Funktion von a und α untersucht. Bei festem α nimmt diese Funktion ihre (endliche) untere Grenze für einen oder mehrere a -Werte, den oder die typischen Werte γ^α von x der Ordnung α an. Zur Definition von γ_0 und γ_∞ werden nun einerseits die a -Werte, für welche die Grenzfunktionen a) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (E|x - a|^\alpha)^{1/\alpha}$ oder b) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} E|x - a|^\alpha$ ihre untere Grenze annehmen, andererseits c) der Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \gamma_\alpha$ einer γ_α -Folge untersucht. — Für $\alpha \rightarrow 0$ ergeben sich im diskreten Fall bei a) alle x_i -Werte, bei b) der oder die allerhäufigsten Werte von x , bei c), dem Jordanschen Fall, sicherlich ein, aber möglicherweise nicht sämtliche allerhäufigsten x -Werte als typische Werte 0-ter Ordnung. Im rein kontinuierlichen Fall ergeben sich bei b) sämtliche x -Werte, und es läßt sich eine Dreieckverteilung angeben, bei welcher sowohl a) als auch c) einen typischen Wert 0-ter Ordnung ergeben, dieser aber von dem einzigen x -Wert mit größter Dichte verschieden ist. — Für $\alpha \rightarrow \infty$ werden besonders die außerhalb eines Intervalls mit der Wahrscheinlichkeit Null treffbaren, zufallsbeschränkten Veränderlichen betrachtet. Ist bei einer solchen (m, M) das kleinste solche Intervall, dann ergeben a) und c) $(m + M)/2$ als einzigen typischen Wert unendlicher Ordnung, und b) ∞ oder die auf die um $(m + M)/2$ symmetrische Strecke von der Länge $2 - (M - m)$ fallenden Werte, je nachdem diese Differenz negativ oder positiv ist.

Szentmártony (Budapest).

Aitken, A. C.: On the Wishart distribution in statistics. Biometrika, Cambridge 36, 59—62 (1949).

Durch eine Zusammenstellung bekannter Sätze wird verifiziert, daß die Verbindungsverteilung der verschiedenen Momente zweiter Ordnung der n -gliedrigen Stichproben aus einer k -dimensionalen normalen Gesamtheit mit der Momentenmatrix zweiter Ordnung V die von Wishart als solche gefundene und geometrisch wie analytisch abgeleitete ist. Beide besitzen nämlich dieselbe, mit der Parametermatrix S gebildete Determinantenpotenz $|I + 2VS/(n-1)|^{-(n-1)/2}$ als Laplacesche Transformierte. Jene von Wishart auf Grund des — hier erneut

bewiesenen — Siegelschen Hilfssatzes:

$$\int \exp(-\text{Spur}(ST)) |T|^{m-(k+1)/2} dt = \pi^{k(k-1)/4} |S|^{-m} \prod_{h=0}^{k-1} \Gamma(m-h/2)$$

bei positiv definiten, symmetrischen $k \times k$ Matrizen S und T im Raume der veränderlichen Elemente von T .
Szentmártony (Budapest).

Kozakiewicz, W.: On the convergence of sequences of moment generating functions. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 61—69 (1947).

Bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens einer Folge $\{F_n(x)\}$ von Verteilungsfunktionen spielt — insofern nur die Folge der momentenerzeugenden

Funktionen $\{\varphi_n(t)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_n(x) \right\}$ herangezogen wird — bekanntlich der Stetig-

keitssatz der zweiseitigen Laplaceschen Transformation eine fundamentale Rolle. Nach Curtiss [dieselben Ann. 13, 430—433 (1942)] sichert dieser bei Existenz und Konvergenz der zweiten Folge gegen eine Funktion $\varphi(t)$ innerhalb $|t| < \alpha$ die Konvergenz der ersten gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit der momentenerzeugenden Funktion $\varphi(t)$. — Im ersten Teil der vorliegenden Mitteilung wird ohne Heranziehung der Theorie der Laplaceschen Transformation auf Grund des Hellyschen Auswahlprinzips für beschränkte monotone Funktionen folgender Satz bewiesen. Ist $M(x-)$ die obere Grenze von $\{F_n(-x) + 1 - F_n(x)\}$, dann sind bei Existenz von $\{\varphi_n(t)\}$ innerhalb $|t| < \alpha$ zu deren Konvergenz gegen eine Funktion $\varphi(t)$ die Bedingungen (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x-)e^{tx} = 0$ und (b) die Konvergenz

von $\{F_n(x)\}$ gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ in deren Stetigkeitspunkten notwendig und hinreichend; $\varphi(t)$ ist die momentenerzeugende Funktion von $F(x)$. — Der zweite Teil bringt den entsprechenden Satz für zweidimensionale Verteilungen. Die Rolle von $M(x-)$ übernehmen hierbei die entsprechenden Funktionen der beiden Randverteilungen $F_{1,n}(x_1) = F_n(x_1, \infty)$ und $F_{2,n}(\infty, x_2)$.

Szentmártony (Budapest).

Moran, P. A. P.: The spectral theory of discrete stochastic processes. Biometrika, Cambridge 36, 63—70 (1949).

Mitteilung eines vereinfachten Beweises des Slutkyschen Satzes über sinusartige Grenzwerte und dessen Romanovskyschen Verallgemeinerungen bei Folgen vollkommen zufälliger Veränderlichen, sowie einer Behandlung von linearen Differenzengleichungen stationärer vektorieller Zufallsvorgänge. Sie zeigt, daß die Theorie der diskreten stationären Zufallsvorgänge zweiter Ordnung durch die Woldsche Spektraltheorie der Reihenkorrelationskoeffizienten sowie durch die Heranziehung der Quenouilleschen erzeugenden Funktion der Reihenkovarianzen der den Vorgang definierenden Folge von stetigen Zufallsveränderlichen beträchtlich vereinfacht werden kann.

Szentmártony (Budapest).

Onicescu, O. et G. Mihoc: Chaînes de mouvements discontinus et changements d'état. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 32—42 (1947).

Grenzwertsätze bei Irrfahrten im unbegrenzt linearen oder von endlich vielen Längen- und Breitenkreisen auf der Ringfläche sowie endlich vielen achsenparallelen Geraden in der Ebene gebildeten Gitter mit festen Verzweigungswahrscheinlichkeiten.

Szentmártony (Budapest).

Statistik:

Johnson, N. L.: Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika, Cambridge 36, 149—176 (1949).

Das auch vom nomographischen Standpunkt aus gesehen recht interessante Problem der Transformation („Verzerrung“) einer zunächst nichtnormalen Verteilung in eine Normalverteilung wird in der vorliegenden Arbeit zunächst all-

gemein theoretisch und daran anschließend auch praktisch unter Heranziehung der vom Verf. bevorzugten Merkmaltransformation behandelt. Die Entwicklungen gehen aus von der allgemeinen Transformation $z = \gamma + \delta \cdot f((x - \xi)/\lambda)$, wobei f eine monotone Funktion bedeutet. Die Größen γ , δ , ξ und λ sind Konstante. Spezielle Formen der Transformationen werden aus der sich für $f((x - \xi)/\lambda) = \ln(x - \xi)/\lambda$ ergebenden „logarithmischen Normal-Transformation“ durch Verallgemeinerung hergeleitet, und es werden aufschlußreiche Beziehungen zu gewissen Verteilungskurven von Pearson aufgezeigt. Insbesondere wird untersucht, inwieweit die vom Verf. behandelten Transformationen Variable, die einer Pearsonschen Verteilung folgen, näherungsweise in solche mit normaler Verteilung überführen. Die Darstellung wird besonders belebt durch mehrere Diagramme, in denen maßgebende theoretische Beziehungen ihre sinnfällige Veranschaulichung finden, sowie durch eine Reihe aus der Literatur herangezogener Beispiele zur Erhärtung der theoretisch gewonnenen Ergebnisse durch zahlenmäßige Auswertung. In der Arbeit wird übrigens mit beachtlicher Ausführlichkeit auch auf die bisherige Entwicklung der Transformationstheorie der Verteilungskurven seit Galton und McAlister eingegangen.

G. Wünsche (München).

Wishart, John: Cumulants of multivariate multinomial distributions. Biometrika, Cambridge 36, 47—58 (1949).

Für die Taylorsche Entwicklungskoeffizienten κ der logarithmischen momentenerzeugenden Funktion fand Guldberg [Skand. Aktuarietidskr. 18, 270—278 (1935)] bei der eindimensionalen Bernoullischen (gewöhnlichen) bzw. Pascalschen (negativen) multinomialen Verteilung mit den wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $\left(p_0 + \sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^s$ bzw. $p_0^s \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^{-s}$ die rekurrenten Relationen $\kappa_{r_1 \dots r_i+1 \dots r_n} = a_i \partial \kappa_{r_1 \dots r_i \dots r_n} / \partial a_i$ mit $a_i = p_i/p_0$ bzw. p_i und $\kappa \dots \kappa_1 \dots = s a_i a_0 = s p_i$ bzw. $s p_i/p_0$. Hier wird zunächst gezeigt, daß bei den zweidimensionalen Bernoullischen bzw. Pascalschen binomialen Verteilungen mit den wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $(p_{00} + p_{10}\alpha + p_{01}\beta + p_{11}\alpha\beta)^s$ bzw. $p_{00}^s (1 - p_{10}\alpha - p_{01}\beta - p_{11}\alpha\beta)^{-s}$ die Relationen

$$\kappa_{r_1+1 \dots r_2} = (a_{10} \partial / \partial a_{10} + a_{11} \partial / \partial a_{11}) \kappa_{r_1 \dots r_2}$$

und

$$\kappa_{r_1 \dots r_2+1} = (a_{01} \partial / \partial a_{01} + a_{11} \partial / \partial a_{11}) \kappa_{r_1 \dots r_2}$$

gelten mit $a_{ik} = p_{ik}/p_{00}$ bzw. p_{ik} und $\kappa_{10} = s(p_{01} + p_{11})$ bzw. $s(p_{10} - p_{11}) + p_{00}$ sowie $\kappa_{01} = s(p_{11} + p_{01})$ bzw. $s(p_{01} - p_{11}) + p_{00}$. Diese Formeln geben einen Einblick in die Struktur der bei mehrdimensionalen multinomialen Verteilungen bestehenden Relationen, wie dies für den Bernoullischen Fall an einer dreidimensionalen und $4 \times 3 \times 2$ -nominalen Verteilung illustriert wird. Szentmártony.

Cox, D. R.: A note on the asymptotic distribution of range. Biometrika, Cambridge 35, 310—315 (1948).

Seien $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ Verteilungsdichte und -funktion der Variablen x , $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ die durch $\Phi(x_n^{(1)}) = 1 - 1/n$, $\Phi(x_n^{(2)}) = 1/n$ definierten Variablenwerte, x_1, x_2 größter und kleinster Wert einer n -gliedrigen zufälligen Stichprobe des x -Kollektivs, so ergibt sich aus der von R. A. Fisher und L. H. C. Tippett [Proc. Cambridge philos. Soc. 24, 180—190 (1928)] im Falle $\varphi(x) = O(\exp(-|x|))$ für $y_i = n(x_i - x_n^{(i)}) \cdot \varphi(x_n^{(i)})$ ($i = 1, 2$) abgeleiteten Grenzverteilung auf Grund der bei großem n annähernd geltenden Unabhängigkeit von x_1, x_2 die Grenzverteilung von $W = y_1 - y_2$ als

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-W - e^{-W-y_2} - e^{y_2}) dy_2 = 2e^{-W} K_0(2e^{-W/2})$$

mit einer modifizierten Besselschen Funktion K_0 2-ter Art. Im Falle einer symmetrischen Verteilung $\varphi(x)$ mit Mittelwert 0 erhält man bei großem n asymptotisch für

die Variationsbreite w_n der Stichprobe $w_n = 2x_n^{(2)} + W/n\varphi(x_n^{(2)})$ aus Fisher und Tippetts Resultaten Mittelwert und Streuung

$$\bar{w}_n = 2x_n^{(2)} + 2\gamma/n\varphi(x_n^{(2)}), \quad \sigma_{w_n} = \pi/\sqrt{3n\varphi(x_n^{(2)})} \quad (\gamma = \text{Eulersche Konstante}).$$

Außerdem wird aus der bekannten exakten Verteilung von w_n eine für große n asymptotisch geltende Verteilung

$$(2) \quad c_n [\varphi(w_n/2)]^2 \cdot [\Psi(w_n/2)]^{n-3/2} / [\varphi'(-w_n/2)]^{1/2}$$

mit $\Psi(x) = \Phi(x) - \Phi(-x)$ gewonnen. Diese und die oben skizzierte Grenzverteilung werden für den Sonderfall einer Normalverteilung $\varphi(x)$ und $n = 20$ bzw. 50 mit der von G. Elfving (dies. Zbl. 30, 168)] angegebenen Näherung und mit dem exakten Ausdruck numerisch verglichen; die Elfving'sche Lösung bewährt sich am besten, (1) am schlechtesten. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Banerjee, D. P.: On percentage points of incomplete betafunctions and χ^2 distributions. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 53—54 (1949).

Für die Beta-Verteilung der stochastischen Variablen x mit der Summenfunktion

$$P(x, p, q) = \Gamma(p+q) \cdot \int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx / \Gamma(p) \Gamma(q)$$

bestimmt Verf. für gegebene p, q, P den zugehörigen Variablenwert x mittels Taylorscher Reihenentwicklung von

$$x = f(P - \alpha) = \frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} f^{(r)}(0) \cdot \frac{(P - \alpha)^r}{r!}$$

um den Punkt ($x = 0,5$; $P = \alpha$). Analog löst Verf. die Gleichung der χ^2 -Verteilung

$$P(x, \nu) = \{\Gamma(\frac{1}{2})\}^{\nu/2} \int_x^{\infty} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} dx / \Gamma(\frac{\nu}{2})$$

nach x auf in der Form

$$x = f(P - \alpha) = 1 + \sum_1^{\infty} f^{(r)}(0) \cdot \frac{(P - \alpha)^r}{r!}.$$

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Lancaster, H. O.: The derivation and partition of χ^2 in certain discrete distributions. Biometrika, Cambridge 36, 117—129 (1949).

Verf. stellt die durch $(p_1 + p_2 + \dots + p_n)^a$ erzeugte multinomiale Verteilung dar als Produkt von $(n-1)$ jeweils durch $[p_{n-i}/(p_n + p_{n-1} + \dots + p_{n-i}) + (p_n + p_{n-1} + \dots + p_{n-i+1})/(p_n + p_{n-1} + \dots + p_{n-i})]^{a_n + a_{n-1} + \dots + a_{n-i}}$ erzeugten Binomialverteilungen. Asymptotisch entspricht dem eine additive Zerlegung des der multinomialen Verteilung entsprechenden χ^2 mit $n-1$ Freiheitsgraden in $(n-1)$ unkorrelierte mit je 1 Freiheitsgrad, d. h. in die Quadrate von $n-1$ unkorrelierten normal verteilten Variablen mit Mittelwerten 0 und Streuungen 1. Entsprechend wird die exakte Wahrscheinlichkeit einer empirischen zweidimensionalen Kontingenztafel a_{ij} ($i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s$), unter der Annahme, daß für die entsprechenden Zeilenwahrscheinlichkeiten Unabhängigkeit herrsche: $P_{ij} = p_i \cdot p_j$, dargestellt als Produkt der beiden empirischen Randverteilungen als Multinomialverteilungen $(p_1 + \dots + p_r)^a$ bzw. $(p_{\cdot 1} + \dots + p_{\cdot s})^a$ und der ihrerseits in das Produkt von $(r-1)(s-1)$ hypergeometrischen Verteilungen (Vierfeldertafeln) zerlegbaren kombinatorischen Wahrscheinlichkeit $\prod_i a_i! \prod_j a_j! / a! \prod_{i,j} a_{ij}!$ für die beobachtete Kontingenztafel unter der Annahme $p_i = a_i/a, p_j = a_j/a$; dem entspricht additive Zerlegung des zur Prüfung der Hypothese $p_{ij} = p_i \cdot p_j$ mit beliebigen p_i, p_j dienenden χ^2 der Kontingenztafel mit $r-1$ bzw. $s-1$ Freiheitsgraden in die beiden dem Vergleich der Randverteilungen a_i bzw. a_j mit den theoretischen p_i bzw. p_j dienenden χ^2 -Werte mit $r-1$ bzw. $s-1$ Freiheitsgraden und das der reinen Unabhängigkeitsprüfung bei festen Randzahlen

dienende χ^2 mit $(r-1)(s-1)$ Freiheitsgraden. Ferner beweist Verf., daß die von Irwin in der nachstehend besprochenen Arbeit für die exakte Zerlegung von χ^2 angegebene Transformation der Variablen a_{ij} mittels Helmertscher Matrizen auf eine $r \cdot s$ -gliedrige Kontingenztafel führt, deren 1-te Zeile und 1-te Kolonne lauter Nullen enthält.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Irwin, I. O.: A note on the subdivision of χ^2 into components. Biometrika, Cambridge 36, 130—134 (1949).

Die von Lancaster in der vorangehenden Arbeit (s. vorsteh. Referat) durch Anwendung der Stirlingschen Formel auf die exakten Wahrscheinlichkeitsverteilungen approximativ erzielten Zerlegungen von χ^2 werden vom Verf. exakt hergeleitet. Seien a_i/a ($i = 1, \dots, n$) beobachtete Häufigkeiten und $m_i/a = p_i$ die entsprechenden Erwartungswerte, so wird

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - m_i)^2 / m_i$$

durch Transformation der n normierten Variablen $x_i = (a_i - ap_i) / \sqrt{ap_i}$ mittels einer orthogonalen Helmert-Matrix, $u_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j$ ($i = 1, \dots, n$), zerlegt in die entsprechende Quadratsumme von $n-1$ unkorrelierten normierten Variablen

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \\ &= (1/a) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i} - \frac{a_{i+1}}{m_{i+1}} \right)^2 / \left(\frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Analog wird, wenn a_{ij}/a , p_{ij} ($i = 1, \dots, r$; $j = 1, \dots, s$) beobachtete und (auf Grund der beobachteten Randverteilungen) erwartete Häufigkeiten einer zweidimensionalen Kontingenztafel sind, die $r \cdot s$ -gliedrige Summe

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (a_{ij} - ap_{ij})^2 / ap_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} u_{ij}^2$$

zerlegt in die Summe der $(r-1)(s-1)$ Quadrate der Variablen u_{ij} , die sich durch eine vom Verf. angegebene Transformation aus den x_{ij} ergeben. M. P. Geppert.

Morse, Anthony P. and Frank E. Grubes: The estimation of dispersion from differences. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 194—214 (1947).

Zur Schätzung des konstant annehmbaren Streuungsquadrats σ^2 einer endlichen Folge von Zufallsveränderlichen x_1, \dots, x_n , deren Mittelwerte η_i während $a = t_1 < \dots < t_n = b$ sich gemäß $\eta_i = f(t_i)$ ändern, sind bisher praktisch bzw. theoretisch nur verschiedene quadratische Mittelwerte ihrer ersten Differenzen herangezogen bzw. untersucht worden. Hier werden die auch bei sinusartigen Mittelwertsänderungen sich brauchbar erweisenden Schätzungen von σ^2 durch

mittlere quadratische höhere Differenzen $d_{n,p}^2 = \sum_{i=p+1}^n (A^p x_i)^2 / [(C_p^2) (n-p)]$ mit

$A^p x_i = A^{p-1} x_i - A^{p-1} x_{i-1}$ betrachtet. Bei normal verteilten, statistisch unabhängigen $x_i - \eta_i$ ergibt sich mit einem Mittelwert $E(d_{n,p}^2) = \sigma^2 + \varepsilon_{n,p}^2$ das Streuungsquadrat von $d_{n,p}^2$ als höchstens gleich $4\varepsilon_{n,p}^2 \sigma^2 + 2\sigma^4 / [W(n,p)(n-1)]$, wo

$\varepsilon_{n,p}^2 \leq \binom{2p}{p}^{-1} \left(\frac{b-a}{n-p} \right) \binom{b-a}{n-1}^{2p-1} \int_a^b [f^{(n)}(t)]^2 dt / (b-a)$ ist. Die Werte von $W(n,p)$,

einem Ausdruck von Binomialkoeffizienten, werden für $1 \leq p \leq 10$ und $2 \leq n < 100$ sowie einige Werte über 100 tabellarisch angegeben. Szentmártony.

Benson, F.: A note on the estimation of mean and standard deviation from quantiles. J. R. statist. Soc., London, Ser. B 11, 91—100 (1949).

Für den Fall, daß der Mittelwert und die Streuung einer Ausgangsverteilung mittels zweier Quantile einer ihr entnommenen großen Zufallsstichprobe geschätzt

werden sollen, zeigt Verf., daß, wenn die Verteilung nicht stark von der Normalverteilung abweicht, die halbe Summe der Quantile von der Ordnung $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ als Schätzwert für den Mittelwert einen minimalen systematischen Fehler aufweist. Für die Streuung ist die Differenz der Quantile von der Ordnung 0,93 und 0,07 dividiert durch 2,95 ein Schätzwert, der mit einem minimalen systematischen Fehler behaftet ist. Liegt als Ausgangsverteilung eine Normalverteilung zugrunde, so sind beide Schätzwerte von systematischen Fehlern frei. Die Leistungsfähigkeit des Schätzwertes für den Mittelwert kommt in diesem Fall mit 75% der maximalen Leistungsfähigkeit von 81% sehr nahe, während der Schätzwert für die Streuung der leistungsfähigste ist, der sich mit einem Quantilpaar erzielen läßt.

Georg Friede (Göttingen).

Walsh, John E.: On the range-midrange test and some tests with bounded significance levels. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 257—267 (1949).

x_1, \dots, x_n seien die nach steigender Größe geordneten, einem beliebigen Kollektiv unabhängig voneinander entnommenen Glieder einer Stichprobe. Verf. untersucht den von E. S. Pearson [The distribution of frequency constants in small samples from non-normal symmetrical and skew populations, *Biometrika*, Cambridge **21**, 280—286 (1929)] empfohlenen Test zur Schätzung $\mu \geq \mu_0$ des unbekannten Kollektiv-Mittelwertes μ mit Hilfe der Verteilung von $D = [(x_1 + x_n)/2 - \mu_0]/(x_n - x_1)$. Für den Fall eines normalen Kollektivs und kleine n wird die Wirksamkeit des Kriteriums durch Vergleich seiner Leistungsfähigkeit (power-function) mit derjenigen des jeweils entsprechenden optimalen Studentschen t -Testes erwiesen. An sechs Beispielen extrem nicht normaler Kollektive wird gezeigt, daß bei kleinen n der D -Test gegen die Gültigkeit der Normalverteilung im Kollektiv nicht sehr empfindlich ist. Für kleine n ist somit der D -Test gegenüber dem t -Test zu empfehlen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Walsh, John E.: Some significance tests for the median which are valid under very general conditions. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 64—81 (1949).

Seien x_1, \dots, x_n die nach steigender Größe geordneten Glieder einer Stichprobe, die unabhängig voneinander n kontinuierlich verteilten, symmetrischen Kollektiven mit gleichem Zentralwert Φ entnommen werden. Verf. benutzt Ordnungsparameter der Stichprobe, d. h. auf der Ordnung x_1, \dots, x_n beruhende Meßgrößen der Form $x_i, (x_i + x_j)/2$, um auf ihnen systematisch symmetrische einseitige Testkriterien für den unbekannten Zentralwert aufzubauen, die keine weiteren Voraussetzungen, insbesondere nicht Normalverteilung der Kollektive erfordern. Für den Sonderfall normal verteilter Kollektive wird die Wirksamkeit (Effizienz) und die Leistungsfähigkeit (power-function) dieser Kriterien mit denjenigen des in diesem Falle optimalen Studentschen t -Kriteriums verglichen. Eine Reihe von Sätzen dient der Untersuchung der Eigenschaften dieser in ihrer numerischen Anwendung sehr leichten Ordnungs-Testkriterien.

M. P. Geppert.

Blackwell, David: Conditional expectation and unbiased sequential estimation. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **18**, 105—110 (1947).

Siano t ed u due stimatori dello stesso parametro di cui il primo non sia funzione del secondo; inoltre lo stimatore t sia „unbiased“ ed u sia „sufficient“. — In queste condizioni la funzione di regressione di t rispetto ad u fornisce uno stimatore „unbiased“ che è funzione del solo u ed ha la varianza generalmente minore a quella di t . — L'A. sviluppa alcune conseguenze delle precedenti osservazioni per il caso del metodo di A. Wald [*Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **16**, 117—186 (1945)]

G. Pompilj (Roma).

Paulson, Edward: A note on the efficiency of the Wald sequential test. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **18**, 447—450 (1947).

L'A. dimostra che il numero medio delle osservazioni richieste per poter applicare il metodo di A. Wald [*Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **16**, 117—186 (1945)]

al paragone dell'ipotesi $\Theta = \Theta_0$ con l'altra $\Theta = \Theta_1$, quando Θ_0 differisce assai poco da Θ_1 , è praticamente indipendente dalla forma della distribuzione. — Ne segue che le tavole di A. Wald [loc. cit.] calcolate nell'ipotesi dalla distribuzione normale, sono applicabili in casi ben più generali quando Θ_0 è assai prossimo a Θ_1 .
G. Pompilj (Roma).

Chernoff, Herman: Asymptotic studentization in testing of hypotheses. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 268—278 (1949).

In einer Reihe von Sätzen knüpft Verf. an Walds Methode an, durch sukzessive Approximationen kritische Bereiche fast konstanter, d. h. von einem Störungsparameter Θ unabhängiger Größe zu konstruieren. Unter vernünftigen Voraussetzungen liefert der s -te Schritt einen kritischen Bereich von der Größe $\alpha + R_s(\Theta)$, wo α die Signifikanzgrenze, Θ der unbekannte Wert des Störungsparameters, N der Stichprobenumfang und $R_s(\Theta) = O(N^{-s/2})$ ist. M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Huzurbazar, V. S.: Inverse probability and sufficient statistics. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 225—229 (1949).

Für die von einem Kollektivparameter α abhängenden Verteilungsgesetze von x der Form

$$f(x, \alpha) = \exp \{u_1(\alpha) u_2(x) + u_3(x) + u_4(\alpha)\},$$

welche bekanntlich notwendig und hinreichend den Fall charakterisiert, in welchem α eine hinreichende (sufficient) Schätzung T zuläßt, beweist Verf., daß die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für α auf Grund einer Stichprobe x_1, \dots, x_n von der analogen Form

$$\Phi(\alpha, T) = \exp \{v_1(\alpha) \cdot v_2(T) + v_3(\alpha) + v_4(T)\}$$

ist, und unter Verwendung der charakteristischen Funktion von T , daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zweite Stichprobe x'_1, \dots, x'_{n_2} die Maximum-likelihood-Schätzung $\hat{\alpha}_2$ liefere, auf Grund der von einer ersten Stichprobe x_1, \dots, x_{n_1} gelieferten Maximum-likelihood-Schätzung $\hat{\alpha}_1$ sich explizit als Funktion von $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ allein darstellen läßt. In dem bekanntlich durch die Form $f(x, \alpha) = g(x)/h(\alpha)$ charakterisierten Spezialfall, in welchem die Variationsbreite von x abhängt von α , ergibt sich die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für α ebenfalls von der gleichen Form $G(\alpha)/H(T)$. Ein analoges Resultat gilt für den durch

$$f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n u_k(\alpha_1, \dots, \alpha_p) v_k(x) + A(x) + B(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \right\}$$

gekennzeichneten Fall von mehreren Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, die zusammen eine suffiziente Schätzung zulassen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Huzurbazar, V. S.: The likelihood equation, consistency and the maxima of the likelihood function. Ann. Eugenics, London 14, 185—200 (1948).

Das Verteilungsgesetz einer stochastischen Variablen x laute auf Grund des Kollektivparameters Θ $f(x, \Theta)$. Unter sehr allgemeinen Bedingungen zeigt Verf.,

daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Likelihood-Funktion $L = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \Theta)$

einer Stichprobe x_1, \dots, x_n von n unabhängiger Beobachtungen ein Maximum habe, für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt. Für den durch Verteilungsgesetze der Form $f(x, \Theta) = \exp \{u_1(\Theta) u_2(x) + u_3(x) + u_4(\Theta)\}$ charakterisierten Spezialfall, in welchem Θ eine hinreichende (sufficient) Schätzung zuläßt, wird gezeigt, daß L für jede Stichprobe jeder Größe ein einziges Maximum aufweist. Hängt der Variationsbereich von x nicht von Θ ab, so ist eine konsistente Lösung der Likelihood-Gleichung notwendig eindeutig. Hängt dagegen der x -Variationsbereich von Θ ab, so liefert unter gewissen Bedingungen die Betrachtung der beiden extremen Stichprobenwerte an Stelle der Likelihood-Gleichung eine konsistente Schätzung.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Mood, A. M.: Tests of independence in contingency tables as unconditional tests. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 114—116 (1949).¹

Sei $f(x; \theta)$ die vom Kollektiv-Parametersatz θ abhängige Wahrscheinlichkeit der Variablen x , $\hat{\theta}$ eine hinreichende (suffiziente) Schätzung der θ und $h(\hat{\theta}; \theta)$ die Wahrscheinlichkeit für Eintreffen von $\hat{\theta}$ in einer Stichprobe, wenn im Kollektiv θ gilt. Die in der Simultan-Wahrscheinlichkeit für die Stichprobe x_1, \dots, x_n auf Grund von θ ,

$$\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = g(x_1, \dots, x_n | \hat{\theta}) \cdot h(\hat{\theta}; \theta),$$

auftretende bedingte Wahrscheinlichkeit g , die bei Testkriterien für Hypothesen über θ eine Rolle spielt, deutet Verf. durch Hinzunahme des Likelihood-Verhältnisses Λ als zweiter Variabler als nicht bedingte Wahrscheinlichkeit. Der Gedankengang wird illustriert an der zweidimensionalen Kontingenztafel n_{ij} mit den Randzahlen $n_{i.}, n_{.j}$ ($\sum \sum n_{ij} = \sum n_{i.} = \sum n_{.j} = n$) und der Prüfung auf Unabhängigkeit. Hier ist $\Lambda = \prod n_{ij}^{n_{ij}} / \prod n_{i.}^{n_{i.}} \prod n_{.j}^{n_{.j}}$, und als die neu zu deutende bedingte Wahrscheinlichkeit

$$g(n_{ij} | n_{i.}, n_{.j}) = \prod n_{ij}! / n! \prod n_{i.}!$$

ergibt sich die üblicherweise im Unabhängigkeitstest verwendete „kombinatorische“ Wahrscheinlichkeit.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Huzurbazar, V. S.: On a property of distributions admitting sufficient statistics. *Biometrika*, Cambridge **36**, 71—74 (1949).

Sia $f(x, \theta_1 \dots \theta_p)$ la funzione di densità di una distribuzione dipendente da p parametri che, per ipotesi, ammetta p stimatori sufficienti dei parametri stessi. Sia poi x_1, x_2, \dots, x_n un campione della distribuzione ottenuto mediante n osservazioni bernoulliane. — Consideriamo infine la così detta funzione di verosimiglianza del campione: $L = \sum_{i=1}^p \log f(x_i, \theta_1, \dots, \theta_p)$. Indichiamo con $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ le soluzioni del sistema:

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, p)$$

L'A. dimostra che in queste condizioni sussiste la interessante relazione:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right)_{\theta} = \left\{ M \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \right\}_{\theta}.$$

A partire da questa relazione l'A. dimostra poi alcune proposizioni, tra cui va ricordata la semplicissima dimostrazione del fatto che le soluzioni del sistema (1) rendono massima la funzione L .

G. Pompilj (Roma).

Lehmann, E. L. and C. Stein: Most powerful tests of composite hypotheses. I. Normal distributions. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **19**, 495—516 (1948).

Zur Prüfung von zusammengesetzten Hypothesen über unbekannte Parameter θ sonst bekannter Verteilungsdichten $f_{\theta}(x)$ gibt zunächst ein allgemeiner und abstrakter Satz der Verff. kritische Bereiche w an, die gegenüber einer speziellen Alternative: $g(x) \neq f_{\theta}(x)$ die kräftigsten sind, d. h. der Wahrscheinlichkeit $\int_w g(x) dx$ den größten Wert erteilen. Allerdings nicht wie gewöhnlich, unter der Neyman-Pearson'schen Ähnlichkeitsbedingung $\int_w f_{\theta}(x) dx = \varepsilon$ für alle $f_{\theta}(x)$ bei der Bedeutungsstufe ε , sondern unter der abgeschwächten Neyman-Wald'schen Bedingung $\int_w f_{\theta}(x) dx \leq \varepsilon$ mit dem Ungleichheitszeichen für Teilmengen der θ von bestimmtem Maß. Auf Grund dieses Satzes wird dann an einer Reihe von Beispielen bei Normalverteilungen gezeigt, daß nichttriviale kräftigste Prüfverfahren

von Hypothesen gegenüber gewissen Alternativen ohne ähnliche kritische Bereiche gegeben werden können. Das interessanteste ist jenes der Studentschen Hypothese bei einer 0,5 nicht überschreitenden Bedeutungsstufe. Bis auf eines — die Gleichheit des Streuungsquadrates der Elemente von mehreren Stichproben aus einer normalen Verteilung bei gleichem Mittelwert prüfendes — sind alle angegebenen Prüfverfahren im Waldschen Sinne zulässig, d. h. mit solchen kritischen Bereichen w angegeben, welche von anderen w' mit $\int_{w'} f_{\theta}(x) dx < \int_w f_{\theta}(x) dx$ für manche θ nicht überflügelt werden. Hierbei wird der kritische Bereich durch seine mengen-theoretisch charakteristische Funktion ersetzt, oder — falls die Stichprobennahme mit einer Tafel von Zufallszahlen erfolgt — durch eine kritische Funktion $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, die jedem Werte der Zufallsveränderlichen eine Wahrscheinlichkeit des Verwerfens der Hypothese zuordnet. *Szentmártony (Budapest).*

Lehmann, E. L. and C. Stein: On the theory of some non-parametric hypotheses. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 20—45 (1949).

Die bekannten Verfahren zur Prüfung der Hypothese H bezüglich Unabhängigkeit und identische Verteilung mehrerer Zufallsveränderlichen sind auch zur Prüfung jener Hypothese H' verwendbar, welche sich auf die Symmetrie der Verteilungsfunktion ihrer Verbindung bezieht. In der vorliegenden Mitteilung werden zunächst zwei Verfahren zur Prüfung einer verallgemeinerten Hypothese der Art H' angegeben. Und zwar zuerst kräftigste Verfahren einer einfachen nichtparametrischen Alternative gegenüber, sodann nach einem unveröffentlichten Ergebnis von Hunt und Stein im Waldschen Sinne schärfste gegenüber gewissen zusammengesetzten, d. h. in Parametern teilweise festgesetzten Alternativen. Beide werden an einer Reihe von Verfahren, die teilweise von R. A. Fisher, Pitman, Wald und Wolfowitz stammen, illustriert. Sie beziehen sich sowohl auf normale, als auch binomiale und andere nichtnormale Alternativen. — Die entsprechende Theorie der Hypothese H ist von der vorigen ganz verschieden. Es läßt sich aber zeigen, daß, einem Resultat von Feller und Scheffé entsprechend, nach welchem alle Ergebnisse über optimale Verfahren zur Prüfung von H' mit den entsprechenden zur Prüfung von H äquivalent sind, falls letztere auf ähnliche kritische Bereiche beschränkt werden, diese Äquivalenz auch bezüglich vieler, der von den Verff. hier behandelten allgemeineren Hypothesen besteht. Eine zum Schluß skizzierte weitere Verallgemeinerung ermöglicht den Verff., eine Beziehung ihrer Theorie mit der üblichen parametrischen anzudeuten. *Szentmártony (Budapest).*

Lawley, D. N.: Problems in factor analysis. Proc. R. Soc. Edinburgh A 62, 394—399 (1948).

n Variablen x_1, \dots, x_n , die einer n -dimensionalen Normalverteilung mit den Mittelwerten 0 folgen, seien von m gemeinsamen und n spezifischen Faktoren abhängig. Mit Hilfe des in der Faktor-Analyse üblichen Matrizen-Kalküls werden Formeln hergeleitet zur näherungsweisen Bestimmung der Stichproben-Varianzen und -Kovarianzen der restlichen Kovarianzen nach Ausschaltung der Wirkung der Faktoren. Ferner werden die Varianzen und Kovarianzen der geschätzten Gewichte der beteiligten spezifischen Faktoren angegeben. *M. P. Geppert.*

Votaw jr., David F.: Testing compound symmetry in a normal multivariate distribution. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 19, 447—473 (1948).

t einer multidimensionalen Normalverteilung folgende Variablen heißen vollkommen symmetrisch, wenn die Verteilung gegenüber allen Permutationen der Variablen invariant ist, d. h. wenn alle Mittelwerte, alle Streuungen und alle paarweise gebildeten Kovarianzen untereinander gleich sind. Gelten Gleichheit der Mittelwerte bzw. der Streuungen und Kovarianzen nur innerhalb, und Gleichheit der Kovarianzen zwischen bestimmten Sätzen der t Variablen, so liegt „zusammen-

gesetzte“ (compound) Symmetrie derselben vor. Verf. klassifiziert die verschiedenen möglichen Typen zusammengesetzter Symmetrie und leitet, aufbauend auf Methoden von S. S. Wilks [Sample criteria for testing equality of means, equality of variances, and equality of covariances in a normal multivariate distribution; Ann. Math. Statist., Baltimore Md. 17, 257—281 (1946)], für die Prüfung der entsprechenden Hypothesen an Hand von Stichproben Testkriterien ab. Für diese durch Anwendung des bekannten Neyman-Pearsonschen Likelihood-Verhältnisses gewonnenen Testgrößen werden unter der Voraussetzung, daß die zu prüfende Hypothese wahr sei, die Momente berechnet, die sich mit denjenigen von nach unvollständigen B-Funktionen verteilten Variablen in Beziehung bringen lassen. *M. P. Geppert.*

Anderson, T. W.: On the theory of testing serial correlation. Skand. Aktuarietidskr. 1948, 88—116 (1948).

Es besitze die als ein n -dimensionaler Spaltenvektor aufgefaßte Stichprobe x aus einer Gesamtheit die Verteilungsdichte $c \exp [-\alpha(x - \mu')(\Psi + \lambda \Theta)(x - \mu)/2]$ mit konstantem $c, \alpha > 0$, dem Mittelwert $\mu = \sum_{v=1}^m \beta_v \varphi_v$ sowie den positiv definiten $n \times n$ Matrizen Ψ und $\Psi + \lambda \Theta$ bei symmetrischer Θ ; Strich bedeutet Umklappung. Die im Titel genannte Theorie der Unabhängigkeitsprüfung sukzessiver Beobachtungen aus einer normal verteilten Gesamtheit wird dann auf folgende Sätze gestützt. — 1. Ein Bereich w ist bezüglich eines Prüfverfahrens der Hypothese $H_0: \lambda = 0$ dann und nur dann ein dem Stichprobenraume W ähnlicher kritischer Bereich der Größe ε , wenn das Wahrscheinlichkeitsverhältnis der Durchschnitte von w bzw. W mit den Bereichen $x' \Psi x = \text{konst.}$, $x' \Psi \varphi_v = \text{konst.}$ gleich ε ist. 2. Sind die φ_v lineare Kombinationen von m Eigenvektoren von $\Theta - \omega \Psi$ und $x = B y$ eine Umwandlung mit solcher Matrix, daß $B' \Psi B = I$ und $B' \Theta B$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten ω_i als Hauptdiagonalelementen werden, dann ergeben sich die Prüfverfahren $U_1 < \frac{\sum_{v=1}^n \omega_i y_i^2}{\sum_{v=1}^n y_i^2} = U$ bzw. $U < U_0$ als die gleichmäßig kräftigsten von H_0 einer solchen von $\lambda < 0$ bzw. > 0 gegenüber; hier sind U_1 bzw. U_0 dadurch bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeiten der ihnen entsprechenden Ungleichungen bei H_0 gleich ε werden. 3. Unter den angegebenen φ_v -Bedingungen gibt es auch ein gleichmäßig kräftigstes Prüfverfahren von H_0 einer solchen von $\lambda \leq 0$ gegenüber. — Spezialisierungen von Ψ und Θ zeigen, daß beste Prüfverfahren für Reihenkorrelationen bei einigen (z. B. zirkularen) Gesamtheiten gegeben, bei anderen dagegen nicht gegeben werden können. Es wird gezeigt, wie bei Existenz eines solchen ein Korrelationskoeffizient konstruiert werden kann. Das Problem der Bestimmung seiner Verteilung wird auf ein bekanntes zurückgeführt und eine Tabelle der Bedeutungsstufen für zwei solche Statistiken angegeben. — In Formel (5) fehlt rechts als Faktor ε und in der zweiten Hälfte von Satz 2 ist im Text an Stelle von $\lambda > 0$ richtig $\lambda < 0$ zu setzen. *Szentmártony (Budapest).*

Anderson, T. W. and Herman Rubin: Estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 46—63 (1949).

Sei y_t ein Zeilenvektor von G zur Zeit t beobachteten Variablen, die gemeinsam von einem zur Zeit t vorbestimmten Vektor z_t abhängen, wobei ein Teil der Komponenten von z_t endogen sei, d. h. von y_t in früheren Zeitpunkten abhängen, ein Teil exogen sei. Die stochastischen Vektoren y_t, z_t seien durch ein lineares Gleichungssystem $B_{yy} \cdot y'_t + \Gamma_{yz} \cdot z'_t = \varepsilon'_t$ verknüpft, wo der Störungsvektor ε_t um den Erwartungswert 0 verteilt sei, B_{yy}, Γ_{yz} Matrizen und die Striche Transponierung bezeichnen. Verf. entwickelt eine Methode, um die Koeffizienten einer der in dem obigen System enthaltenen G linearen Einzelgleichungen zu schätzen. Bei Kenntnis

aller Variablen des Systems und bei Annahme von Normalverteilung für ε_t werden Maximum-likelihood-Schätzungen aus den Regressionen der y_t bezüglich der z_t gewonnen. Ferner werden unter bestimmten Voraussetzungen Mutungsbereiche der Koeffizienten abgeleitet.
M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Champernowne, D. G.: Sampling theory applied to autoregressive sequences. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 10, 204—242 (1948).

Verf. betrachtet die Folge der Ergebnisse $Z(t)$ von n unter den beobachtbaren Bedingungen $f_1(t), \dots, f_k(t)$ angestellten Versuchen (z. B. die Glieder einer Zeitreihe), die sich in der Form

$$Z(t) = \sum_{r=1}^k \lambda_r f_r(t) + \lambda_0 + X_t$$

mit konstanten λ darstellen lassen. Die Fehlerglieder X_t sind hierbei autokorreliert und folgen dem Bildungsgesetz

$$\sum_{s=0}^m b_s (X_{t-s} - c) = \varepsilon_t.$$

Die b_s ($s = 0, \dots, m$) und c sind darin für die Ergebnisfolge konstant, während die ε_t zufällig einer mit dem Mittelwert 0 und der Streuung α^2 normal verteilten Gesamtheit entnommen sind. Bei bekannt vorausgesetzten b_s werden dann mittels der Maximum-Likelihood-Methode c und α^2 geschätzt und Confidencegrenzen für c angegeben. Im Anschluß daran wird die Schätzung eines bzw. zweier Regressionskoeffizienten der Folge bei autoregressivem X_t für $c = 0$ und $c \neq 0$ durchgeführt. Für den Fall, daß die Parameter b_s unbekannt sind, c aber bekannt ist, werden für diese allein und zusammen mit den Regressionskoeffizienten mit Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate Schätzwerte ermittelt. Für eine weitere Schätzung der b_s wird das Bayessche Theorem herangezogen. Die erhaltenen Schätzungen erweisen sich dabei als sehr unempfindlich gegenüber Änderungen der a-priori-Verteilungen.

Georg Friede (Göttingen).

Moran, P. A. P.: Some theorems on time series. II. The significance of the serial correlation coefficient. Biometrika, Cambridge 35, 255—260 (1948).

(Teil I: s. dies. Zbl. 30, 203.) Für die von Orcutt (mit $\bar{x} = n^{-1} \sum_1^n x_i$) als

$$r_s = n \frac{\sum_1^{n-s} (x_i - \bar{x})(x_{i+s} - \bar{x})}{(n-s) \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2},$$

von Hotelling als

$$r_{cs} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(x_{i+s} - \bar{x})}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (x_{i+n} = x_i)$$

sowie von von Neumann und anderen als

$$\frac{\sum_1^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$$

definierten Reihenkorrelationskoeffizienten der Zeitreihen-Stichprobe x_1, \dots, x_n wird eine auf Kendalls k -Momenten beruhende Methode zur exakten Berechnung der ersten vier Momente angegeben unter der Annahme, daß in dem zugrunde liegenden Kollektiv keine Reihenkorrelation besteht und daß alle x dem gleichen Verteilungsgesetz folgen. Stets gilt $E(r_s) = E(r_{cs}) = -(n-1)^{-1}$; bei Normalverteilungen der x :

$$\text{var. } r_1 = (n-2)^2/(n-1)^3, \quad \text{var. } r_{c1} = n(n-3)/(n+1)(n-1)^2,$$

$$\mu_3(r_1) = 4(n-4)(n-3)/(n-1)^4(n+3),$$

$$\mu_3(r_{c1}) = 2(2n-1)(2n-6)/(n-1)^3(n+1)(n+3),$$

$$\mu_4(r_1) = 3n^3(n^2+4n-9)/(n-1)^4(n+2)(n+4)(n+6), \quad \mu_4(r_{c1}) = 3/(n+2)(n+4).$$

Die Resultate bezüglich der Momente von r_{c1} stimmen mit den von W. J. Dixon [Ann. Math. Statist., Baltimore Md. 15, 119—144 (1944)] gegebenen überein.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Cochrane, D. and G. H. Oreutt: Application of least squares regression to relationships containing auto-correlated error terms. J. Amer. statist. Assoc. 44, 32—61 (1949).

Verff. weisen darauf hin, daß die Fehlerglieder in den meisten volkswirtschaftlichen Zeitreihen stark positiv autokorreliert sind. Da, wie an Modellreihen gezeigt wird, die üblichen Schätzverfahren für die Regressionsparameter bei ihrer Anwendung auf derartige Reihen viel an Leistungsfähigkeit verlieren, geben Verff. für diese Schätzungen ein Iterationsverfahren an, das die mit der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Schätzwerte so verbessern soll, daß der Verlust an Leistungsfähigkeit ausgeglichen wird.

Georg Friede (Göttingen).

Stevens, W. L.: Control by gauging. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 10, 54—108 (1948).

Ein Ziel der Fabrikationskontrolle besteht darin, durch laufende Stichproben sich zu vergewissern, daß Mittelwert und Streuung der für den Fabrikationsartikel kennzeichnenden Meßgröße sich nicht wesentlich ändern. Statt dies durch genaue Messung der einzelnen Stücke in Stichproben zu erreichen, ist man aus Sparsamkeitsgründen vielfach dazu übergegangen, jedes Stück nur durch Vergleich mit einem festen Maßstab (gauge, Eichung) zu beurteilen. Diese in den USA in den Kriegsjahren zur Entfaltung gelangte Methode wird durch den Verf. stochastisch unterbaut. Sei x die fragliche Meßgröße, die, wenn μ, σ deren Mittelwert und Streuung sind, der Verteilung $z(u) du$ mit $u = (x - \mu)/\sigma$ folge. Werden $x_1, x_2 > x_1$ als feste Eichmarken (gauges) eingeführt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stück in den Bereich $x < x_1$ bzw. $x_1 < x < x_2$ bzw. $x > x_2$ falle,

$$p = \int_{-\infty}^{u_1} z du \quad \text{bzw.} \quad q = \int_{u_1}^{u_2} z du \quad \text{bzw.} \quad r = \int_{u_2}^{\infty} z du$$

mit $u_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$, $u_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$, und die tatsächlich in einer n -gliedrigen Stichprobe beobachteten Besetzungszahlen a, b, c dieser drei Klassen sind mit der theoretisch gültigen, durch $(p + q + r)^n$ erzeugten, trinominalen Verteilung zu vergleichen. Änderung von μ tritt an der Größe $c - a$, Änderung von σ an $a + c$ zutage. Mit Hilfe der Fisherschen Informationsmatrix wird die Wirksamkeit (efficiency) der Methode untersucht für den Fall, daß die Verteilung $z(u)$ des Kollektivs normal sei, sowie für die extrem hiervon abweichenden Fälle, in denen z eine Cauchysche bzw. eine Eulersche (Pearson III) Verteilung sei.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Stange, K.: Mehrfaches Ausgleichen einer fehlerhaften Punktreihe. Z. angew. Math. Mech. 29, 114—126 (1949).

Das mehrfache Ausgleichen einer fehlerhaften Punktreihe $x_k(t_k)$ mit Hilfe von Potenzreihen beschränkten Grades wird bereits nach wenigen Schritten nahezu wirkungslos. Die Ursache ist die mit jedem Schritt mehr und mehr wachsende Korrelation zwischen den Fehlern $\mu^{(\sigma)}$ der geglätteten Werte $x_k^{(\sigma)}$. Außerdem wird die Ausgangsfunktion $x(t)$ bei jedem Schritt um den gleichen Betrag „gefälscht“. Die Verhältnisse werden für die einfachsten Fälle linearen und quadratischen Ausgleichs zahlenmäßig durchgerechnet. Außerdem wird der Einfluß einer von vornherein vorhandenen Korrelation der Ausgangsfehler μ auf die Fehlerfortpflanzung untersucht. (Autoreferat.)

Nyström (Helsinki).

Middleton, David: Some general results in the theory of noise through non-linear devices. Quart. appl. Math. 5, 445—498 (1948).

Die Mitteilung behandelt den Durchgang eines sinusartigen, modulierten Signals in Begleitung breit- oder engbändiger Geräusche durch eine nichtlineare Vorrichtung

mit gegebener Charakteristik, insbesondere den Durchgang durch einen vorgespannten Gleichrichter mit Potenzcharakteristik, sowie verschiedene ähnliche Vorgänge. Hierbei führt ein bekannter Ansatz zu der Folgerung, daß die Geräuschkomponente der einfallenden Erregung als ein stetiger, stationärer Zufallsvorgang behandelt werden kann. Wird nun mit Hilfe der Charakteristik der Vorrichtung die Korrelationsfunktion des durch die genannte Erregung erzeugten Austrittsströmes bezüglich der Zufälligkeit der Geräuschkomponente bestimmt, so muß diese noch durch Mittelbildung über die Amplituden- und Frequenzphasen der Trägerwelle in eine rein zeitspannenabhängige Funktion übergeführt werden. Die sich so ergebende vollständige Korrelationsfunktion $K(t)$ läßt sich dann nach dem Khintchinesischen Satz als die Cosinustransformierte einer Belegungsdichte $W(f)$, oder umgekehrt letztere als Leistungsspektrum gemäß $W(f) = 4 \int_0^{\infty} K(t) \cos 2\pi f t dt$

darstellen. Nach Berechnung von $K(t)$ bei Voraussetzung normaler Zufallsverteilungen ergeben sich für $W(f)$ sehr allgemeine Reihenentwicklungen, welche in einigen einfachen Fällen behandelt und physikalisch gedeutet werden können. — Die hier skizzierten mathematischen Ausführungen des Textes sind aber rein formal. „Mögliche Schwächen in der Strenge sind durch physikalische Deutung der Resultate überwacht worden.“

Szentmártony (Budapest).

Middleton, David: The spectrum of frequency-modulated waves after reception in random noise. I. Quart. appl. Math. 7, 129—174 (1949).

Untersuchung des Verhältnisses von frequenzmoduliertem Signal und Geräusch beim Durchgang durch Empfangsgeräte mit Hilfe der Khintchinesischen Spektralzerlegung der Korrelationsfunktion der Austrittsspannung als eines stetigen stationären Vorganges. Teil II enthält die allgemeine Theorie wie sie bei Besprechung einer vorangehenden Arbeit des Verf. bei amplitudenmodulierter Trägerwelle [s. vorsteh. Referat] geschildert wurde. Teil III bringt die Behandlung wichtiger Fälle, wie Geräusch allein, nichtmodulierter Träger und Geräusch, sowie sinusartig modulierter Träger im Geräusch. Die bedeutendsten Resultate werden in ihrer physikalischen Interpretation im Teil I vorangestellt.

Szentmártony.

Biomathematik. Versicherungsmathematik:

Harris, H. and C. A. B. Smith: The sib-sib age of onset correlation among individuals suffering from a hereditary syndrome produced by more than one gene. Ann. Eugenics, London 14, 309—318 (1949).

Eine Erbkrankheit werde entweder durch ein Gen A oder durch ein hiervon verschiedenes Gen B bewirkt; das Erkrankungsalter habe in beiden Fällen Mittelwert m_1 bzw. m_2 und Streuungen σ_1 bzw. σ_2 . Die Krankheit sei so selten, daß sippenweise stets nur ein und dasselbe Gen als Krankheitsursache auftritt. Sind die Erkrankungsalter von Mitgliedern der gleichen Sippe unkorreliert und treten die beiden Gene mit den Häufigkeiten π_1, π_2 auf, so ergibt sich als Korrelationskoeffizient der Erkrankungsalter x, y je zweier beliebiger Erkrankten

$$\rho = [1 + (\pi_1 \sigma_1^2 + \pi_2 \sigma_2^2) / \pi_1 \pi_2 \cdot (m_1 - m_2)^2]^{-1}.$$

Um die Hypothese zu prüfen, daß die Krankheit durch mehrere (≥ 2) verschiedene Gene verursacht werde, die sich nur in der Verteilung des Erkrankungsalters unterscheiden, untersucht Verf. die Bedingungen, unter welchen Mischung von zwei Normalverteilungen bimodale Verteilungen liefert, und erörtert weitere damit verwandte Fragestellungen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Wit, G. W. de: Stochastische Probleme in der Versicherungsmathematik. Verzekering-Arch. 28, 19—45 (1949) [Holländisch].

Bericht über die Anwendungen der Theorie der stochastischen Prozesse (Kol-

mogoroff, Feller-Dubrovski) auf die kollektive Risikothorie (F. Lundberg, Cramér, Segerdahl u. a.), besonders das „Liquidationsproblem“. Ein kurzer Abriss der Cramérschen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist vorausgeschickt. In dem kleineren zweiten Teil der Arbeit bespricht Verf. die Anwendungen der stochastischen Theorie auf Kranken- und Unfallversicherungen (O. Lundberg, Dubourdiou). Härten (München).

Dulac, Robert: *Ajustement analytique des tables de mortalité*. Thèse soutenue le 11 Juillet 1944 à l'Institut des Actuaire Français, pour l'obtention du titre de Membre Agrégé. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français **59**, 383—456 (1948).

Das Problem, die nach dem Alter abgestuften Ergebnisse einer Sterblichkeitsmessung einem analytischen Gesetz zu unterwerfen, ist bereits sehr alt und hat durch die Ansätze von Gompertz, Makeham, Quiquet, Thiele u. a. Lösungen gefunden, die in der versicherungsmathematischen Praxis im allgemeinen eine allerdings nur bescheidene Rolle spielen, da zur Ausgleichung einer Sterbetafel zumeist einer sog. „mechanischen Methode“ der Vorzug gegeben wird. Allein von der Makehamschen Formel kann man vielleicht sagen, daß sie sich einigermaßen eingebürgert und in größerem Umfange auch zu mannigfachen weiteren theoretischen Untersuchungen Anlaß gegeben hat. Vor allem ist auch immer wieder die grundsätzliche Frage nach der zweckmäßigsten analytischen Gestalt einer solchen, dem aus der Sterblichkeitsforschung stammenden Material angepaßten „Glättungsformel“ behandelt worden, und zwar sowohl in zahlreichen numerischen Beispielen der Ausgleichung von Sterbetafeln als auch gelegentlich einer theoretischen Behandlung des Gegenstandes. — Auch die vorliegende, sehr ausführlich gehaltene Untersuchung der analytischen Ausgleichung von Sterbetafeln befaßt sich mit dem gleichen Problem und bringt zunächst eine ins Einzelne gehende Darstellung und Diskussion bekannter klassischer „Sterblichkeitsformeln“ sowie eine Erörterung der Kriterien, die man zur Entscheidung, ob eines der betrachteten „Überlebensgesetze“ dem jeweiligen Zahlenstoff angepaßt ist oder nicht, heranzuziehen hat. Die Betrachtungen des Verf. erstrecken sich im übrigen auch auf die Ausgleichung nach analytischen Formeln, wie sie sich aus bestimmten Typen der klassischen Pearsonschen Verteilungsgesetze entwickeln lassen. Das Zahlenmaterial für die umfangreichen numerischen, durch graphische Darstellungen belebten Berechnungen liefern die französischen Bevölkerungssterbetafeln 1920—1923 und 1928—1933, von denen gezeigt wird, daß eine Ausgleichung nach Quiquet zu besseren Resultaten führt als eine Anwendung der Formel von Makeham. Nach Auffassung des Ref. erscheint dieses Ergebnis jedoch nicht sonderlich überraschend, wenn man berücksichtigt, daß die vom Verf. benutzte Quiquetsche Beziehung doppelt so viel Konstanten enthält wie die Makehamsche Formel. — Es muß hervorgehoben werden, daß die bereits im Jahre 1944 vom Verf. zur Erlangung des Titels eines Membre Agrégé des französischen Aktuar-Institutes vorgelegte Arbeit auf eine entsprechende Aufgabenstellung seitens dieses Institutes zurückgeht und daß die Untersuchungen, gemäß den Darlegungen im Vorwort, leider nur unter äußerst widrigen Zeitverhältnissen (ohne Unterlagen, Rechenhilfsmittel und dergl.) vorgenommen werden konnten. Die trotz Fehlens einer Rechenmaschine in so erheblichem Umfange durchgeführten zahlenmäßigen Auswertungen verdienen daher höchste Anerkennung. G. Wünsche (München).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Haag, Jules: *Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels*. Ann. sci. Ecole norm. sup., III. S. **65**, 299—335 (1948).

Verf. behandelt zunächst das linear-homogene System $dx_i/dt = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) x_j$ ($i = 1, 2, \dots, m$) mit periodischen und stetigen p . Bekanntlich gibt es periodische Lösungen zweiter Art, die sich bei Vermehrung des Argumentes um eine Periode mit einem Faktor S (Verf. sagt Dekrement) multiplizieren. Die S sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Verf. zeigt, daß diese Gleichung aus den p durch eine unendliche, stets konvergente Reihe erzeugt werden kann. Er behandelt auch den Fall gleicher Wurzeln und gibt explizite Formeln, aus denen die Existenz periodischer Lösungen wie auch das Verhalten im Unendlichen gewonnen werden kann. Es folgt dann die Untersuchung von nichthomogenen Differentialgleichungen mit periodischen Störungsfunktionen $f_i(t)$ und ihres Verhaltens im Unendlichen. Die Hauptaufgabe aber ist die Theorie der nichtlinearen Systeme $dz_i/dt = f_i(z, t)$

($i = 1, 2, \dots, m$), wobei vorausgesetzt wird, daß die f als Funktionen von t die Periode T haben, daß das System eine periodische Lösung, und zwar von der Periode T besitze und daß die f in einem Bereich um die periodische Lösung als Funktionen der z erste und zweite stetige Ableitungen besitzen. Es kann jetzt dem System ein lineares System zugeordnet werden, dessen Dekremente für das nicht-lineare System maßgebend sind. Theorem: Hinreichende und wahrscheinlich auch notwendige Bedingung der Stabilität ist, daß alle Dekremente absolut kleiner als 1 sind. Wenn das System aber n periodische Lösungen hat, ist für die Stabilität hinreichend und notwendig, daß $S = 1$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von der Vielfachheit n sei und die anderen Dekremente absolut kleiner als 1 sind. Tritt nun noch eine Störungsfunktion $\lambda g_i(z, t)$ additiv hinzu, so gelingt der Nachweis der Stabilität für hinreichend kleine λ , nachdem vorher die Existenz einer periodischen Lösung bewiesen wurde. Die Stabilität hängt freilich noch davon ab, daß eine gewisse, angebbare Gleichung n -ten Grades lauter Wurzeln mit negativem Realteil hat. Der Sonderfall $n = 2$ wird am Schluß besonders behandelt.

Hamel (Landshut).

Prokop, W.: Zum Drallsatz für den starren Körper. Elemente Math., Basel 4, 56—61 (1949).

Verf. ist der Ansicht, daß der Drallsatz $\Theta \dot{\omega} = M$ bezüglich der Momentanachse A der Drehung nur dann gelte, wenn der Abstand des Schwerpunktes S von A von der Zeit unabhängig ist, — während es doch nur darauf ankommt, daß die Bezugsachse momentan im Raume ruht.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Ackeret, J.: Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse. Helvetica physica Acta 22, 127—134 (1949).

Befindet sich ein schlanker Drehkörper, dessen Achse die x -Achse ist und dessen Meridian durch $r = r(x)$ gegeben sei, in einem parallelen Luftstrom, der mit der x -Achse den kleinen Winkel α bildet, so kann man bei Vernachlässigung „kleiner Größen“ den Vorgang durch Überlagerung einer achsialen Anströmung (V_l) und einer Schräganströmung (V_s) beschreiben. Bei der Schräganströmung erfährt der Körper einen Auftrieb, für dessen erste Näherung Verf. eine besonders einfache Herleitung angibt. Ein Scheibchen der Dicke dx erfährt den Impuls $dJ = \pi \rho \cdot r^2 dx V_s$. Die Änderung des Impulses mit der Zeit ist gleich der auf das Scheibchen wirkenden Querkraft, d. h.

$$dQ = \frac{dJ}{dt} = \rho \pi \cdot V_l V_s \frac{d(r^2)}{dx} dx = \rho \alpha \cdot \frac{d(r^2 \pi)}{dx} dx \cdot V^2,$$

wegen $V_l = V \sin \alpha$ und $V_s = V \cos \alpha$. — Durch Integration ergibt sich für die Gesamtquerkraft $Q = \rho \alpha \cdot V^2 (\pi r_e^2)$ mit $r_e =$ Bodenradius und für das Moment in bezug auf die Spitze $M_0 = \rho \alpha \cdot V^2 (G - L \pi r_e^2)$; dabei ist $G =$ Volumen, $L =$ Länge des Körpers. Die Formeln für Q und M_0 findet man als Grenzwerte im wesentlichen schon bei Tsien [J. aeronaut. Sci., New York 5, 480—483 (1938)]. Der Wert der vorliegenden Note liegt in der elementaren Herleitung. — Im Fortgang der Arbeit wird an einem Beispiel die Querkraftverteilung dQ/dx über einen Körper nach der einfachen Formel bestimmt und mit genaueren Berechnungen verglichen. Den Schluß bildet eine Stabilitätsbetrachtung für rotierende Körper.

W. Haack (Berlin).

Castoldi, Luigi: Sulla esatta risoluzione di un classico problema. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 30—33 (1949).

L'A. dimostra insussistente una critica alla soluzione esposta nel trattato di Levi-Civita e Amaldi, del seguente classico problema di meccanica: moto di una catena pesante, avvolta su una carrucola, libera da un lato, appoggiata dall'altro su un tavolo orizzontale.

Graffi (Bologna).

Hydrodynamik:

Rosece, B.: The flow of viscous fluids round plane obstacles. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. S. 40, 338—351 (1949).

Das Problem der langsamen, stationären Strömung einer zähen Flüssigkeit um dünne Platten von beliebiger Form, das durch die Stokesschen Gleichungen bestimmt ist, wird zurückgeführt auf die Integration der Laplaceschen Gleichung mit einfachen Randbedingungen und damit auf die Bestimmung der Potentialverteilung einer elektrostatischen Ladung. Auf diesem Wege wird gezeigt, daß die auf eine Platte senkrecht zur Richtung der Strömung U ausgeübte Kraft g durch $8\pi\mu CU$ gegeben ist, wobei μ die Zähigkeit und C die elektrische Kapazität eines Leiters von derselben Form wie die Platte ist. Die Ausflußgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durch eine elliptische Öffnung in der dünnen Bodenwand ergibt sich als die $2S^2/3\pi\mu s$ -fache Druckdifferenz, wenn S die Fläche und s der Umfang der Öffnung ist. Als weiteres Beispiel wird das Schaufelrad-Viskosimeter von Geddes und Dawson behandelt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Wood, W. L.: Note on a new form of the solution of Reynolds' equation for Michell rectangular and sector-shaped pads. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. S. 40, 220—226 (1949).

Verf. zeigt, daß die von Michell [*Z. Math. Phys.* 52, 123—137 (1905)] gegebene Lösung des hydrodynamischen Problems der Schmiermittelreibung in Traglagern, die in schwerfälliger Form einer unendlichen Reihe gegeben wurde, viel einfacher als eine Kombination von Bessel- und Struveschen Funktionen für imaginäre Argumente ausgedrückt werden kann, für welche Tafeln im *J. Math. Physics*, Massachusetts 1946 veröffentlicht worden sind. In dieser Note werden auch die Formeln für die Traglast, Druckmittelpunkt und für die Strömung des Schmiermittels abgeleitet und auch für dieses die entsprechenden asymptotischen Formen angegeben, die für die meisten praktischen Zwecke genügen. Die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur wird nicht berücksichtigt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Cope, W. F.: The hydrodynamical theory of film lubrication. *Proc. R. Soc., London A* 197, 201—217 (1949).

Die ältere Theorie der Schmiermittelreibung in Lagern, die von O. Reynolds herrührt, geht von der Druckverteilung in konvergenten Kanälen aus. Neuerdings werden aber in zunehmendem Maße Drucklager mit parallelen Seitenflächen angewendet und zur Erklärung der Tragwirkung die Tatsache verwertet, daß die thermische Ausdehnung des Schmiermittels einen Wärmekeil (thermal wedge) erzeugt. In dieser Arbeit wird für die im Schmiermittel durch Reibung entstehende Temperaturverteilung in Verbindung mit dem Wärmekeil eine einheitliche Darstellung gegeben und gezeigt, daß es wenigstens zwei verschiedene Methoden gibt, um Schmierfilme zu erzeugen. In den verwendeten Gleichungen wird die Zähigkeit nicht als eine Konstante, sondern als Funktion des Ortes angenommen, in der Energiegleichung wird außer den Wärmeleitungsgliedern auch eine Dissipationsfunktion eingeführt und die innere Energie als eine Funktion der Temperatur allein angenommen. Das Schmiermittel wird in Form eines dünnen Films eingeführt, so daß z. T. auch die Annahmen der Grenzschantentheorie herangezogen werden können. Es zeigt sich, daß die Veränderlichkeit der Zähigkeit einen großen Einfluß auf die Ausbildung des Wärmekeils hat.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Bouligand, Georges: Un cas typique d'entraînement d'un liquide visqueux. *C. r. Acad. Sci., Paris* 226, 1571—1573 (1948).

Eine zähe Flüssigkeit ist in einem ringförmigen Gefäß enthalten, das durch Umdrehung einer endlichen Fläche S in einer r z-Ebene um die lotrechte z -Achse in einer großen mittleren Entfernung $l = 1/\varepsilon$ von z entsteht. Die Bewegung der

Flüssigkeit wird durch Rotation des Ringes mit einer zeitlich veränderlichen Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon f(t)$ erzeugt, wobei $f(0) = 0$ sein soll. Durch die Drehung des Ringes entsteht eine Strömung in den Meridianebenen des Ringes, die in der vorliegenden Note für den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$, d. i. für den unbegrenzten Zylinder untersucht wird, der eine Translationsbewegung parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit $f(t)$ erfährt, wobei als eingeprägte Kraft nur die Schwere berücksichtigt wird. Das Problem wird auf eine Integro-Differentialgleichung zurückgeführt und durch eine Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen des zugehörigen Kerns dargestellt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Bouligand, Georges: Sur un cas d'entraînement d'un liquide visqueux. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1776—1778 (1948).

In dieser Note wird die in der vorhergehenden untersuchte Bewegung in eine longitudinale parallel zur z -Achse und in eine meridionale in der rz -Ebene zerlegt. Die Stromfunktion dieser Strömung genügt einer linearen Integralgleichung, deren Kern durch die Greensche Funktion des zum Bereich S gehörigen biharmonischen Problems gegeben ist. Es wird gezeigt, daß die kinetische Energie der bewegten Flüssigkeit exponentiell mit t gegen Null abnimmt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Bouligand, Georges: Entraînement d'un liquide visqueux dans un vase annulaire. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 2106—2108 (1948).

Weiterführung der beiden vorhergehenden Noten bezüglich der Frage der Existenz von Bewegungen der angegebenen Art. Die Entwicklungen sind in den drei Noten nur in ihren wichtigsten Schritten enthalten und schließen sich in den Voraussetzungen und Bezeichnungen an das Werk von Henri Villat, Leçons sur les fluides visqueux, Paris 1943, an.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Tempest, R. K.: Some physical interpretations of potentials representing supersonic motion of compressible fluids. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 246—250 (1949).

Verf. betrachtet Lösungen der linearisierten Potentialgleichung für schwache Störungen im Überschallbereich kompressibler Strömungen. Er unterscheidet primäre und sekundäre Dipolpotentiale. Das von Prandtl 1936 eingeführte „sekundäre“ Dipolpotential ist nicht der Grenzfall eines Quell-Senkensystems, dieser ist vielmehr das vom Verf. eingeführte „primäre“ Dipolpotential. Das sekundäre Dipolpotential läßt sich jedoch aus dem primären gewinnen. Z. B. ergibt eine längs einer Strecke dichte, ebene Reihe „primärer“ Dipole am Anfang und Ende der Strecke je einen „sekundären“ Dipol von umgekehrten Vorzeichen. In ähnlicher Weise hängen primäre und sekundäre Dipolverteilungen über Ebenen zusammen.

Kofink (Stuttgart).

Cap, Ferdinand: Über eine Erweiterung der Strömungs- und der Kontinuitätsgleichung der instationären Gasdynamik für den Fall des Vorhandenseins von Gasquellen und des Mitgerissenwerdens fester oder flüssiger Partikel. Acta physica Austriaca 1, 89—97 (1947).

Verf. nimmt an der Bewegungs- und Kontinuitätsgleichung der eindimensionalen, instationären, kompressiblen Strömungen diejenigen Änderungen vor, welche durch ruhende und bewegte Gasquellen in der Strömung bedingt werden. Nach Einführung eine „Schallfunktion“ diskutiert Verf. Charakteristikenverfahren zur Lösung der erweiterten Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen. Seine Ansätze umfassen auch nichtideale Gase, sind aber auf adiabatische Strömungen beschränkt (Fehlen von Verdichtungsstößen).

Kofink (Stuttgart).

Huron, Roger: Sur l'unicité des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz (cas des obstacles polygonaux). C. r. Acad. Sci., Paris 228, 290—292 (1949).

En appliquant les méthodes de Schauder-Leray, l'A. établit un théorème d'unicité pour le problème du sillage plan, posé relativement à un obstacle tranchant,

de forme polygonale, situé dans un canal à bords rectilignes et parallèles. Le théorème s'applique si 1. l'obstacle est symétrique par rapport à l'axe du canal; 2. l'obstacle est convexe vers le fluide vif. Par passage à la limite, l'énoncé demeure aussi valable dans le cas du fluide indéfini. *J. Kravtchenko (Grenoble).*

Huron, Roger: Sur l'unicité des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz (cas des obstacles non lisses). C. r. Acad. Sci., Paris 228, 357 bis 358 (1949).

L'A. étend les conclusions de la note précédente au cas d'un obstacle courbé, admettant un nombre fini de points anguleux. *J. Kravtchenko (Grenoble).*

Fajnzil'ber, A. M.: Über ein Problem der chemischen Dynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 62, 457—460 (1948) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, eine Darstellung (russisch: Modellierung) der Bewegung kolloidaler Lösungen gemäß den Gleichungen für die stationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit zu geben, wobei die kinematische Zähigkeit in der Form $\nu = (\alpha + \beta c)^n$ angesetzt wird und c die Konzentration der Lösung bedeutet. Das dabei auftretende hydrodynamische Problem wird auf die Integration der Wärmeleitungsgleichung zurückgeführt. *Th. Pöschl (Karlsruhe).*

Wärmelehre:

Lohr, Erwin: Quantenstatistik und Kontinuumsphysik. Z. Naturforsch. 3a, 625—636 (1948).

Die Arbeit versucht, die Quantenstatistiken auf ähnliche Weise thermodynamisch herzuleiten, wie das für die Boltzmann-Statistik möglich ist, wenn man die verschiedenen Energiestufen einer Phase als verschiedene Phasen auffaßt. Der erste Abschnitt bringt allgemeine Beziehungen für Systeme, bei denen die Energiedichte nicht vom Volumen abhängt, und dem Druck proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor μ hat für einatomige Gase bei genügend hoher Temperatur den Wert $\frac{3}{2}$, hängt aber im allgemeinen von T ab. Diese Tatsache wird bei den allgemeinen Ableitungen nicht immer berücksichtigt; zumindestens eine Reihe von Gleichungen gelten jedenfalls nur, wenn μ konstant ist. Die Quantentheorie wird durch zwei Überlegungen eingeführt: Zunächst wird eine Art Gleichgewicht zwischen einem „Nullzustand“ (in dem die Teilchen effektiv nicht vorhanden sind), und einem (Bosestatistik) resp. unendlich vielen (Fermistatistik) angeregten Zuständen berechnet. Das dürfte im wesentlichen eine Beschreibung der Situation einer Quantenstatistik mit unbeschränkter Teilchenzahl sein (wo also nur die Gesamtenergie einschließlich der Ruhenergie gegeben ist); tatsächlich ergeben sich die entsprechenden Formeln, wenn man für die in Gl. (28') eingeführte Größe α die (nach Ansicht des Ref. natürlichste) Annahme $\alpha = 0$ macht. Es bleibt dann noch eine Konstante von der Dimension $\text{cm}^{1+3/2\mu} g^{1/2} \text{sec}^{-1}$ übrig, die sich als $h/\sqrt{2m}$ (m = Masse der Teilchen) deuten läßt, wenn man ad hoc $\mu = \frac{3}{2}$ setzt. — Das Ergebnis ist wohl die beste Ableitung der in Frage stehenden Formeln, die sich geben läßt, wenn man auf die Fortschritte der theoretischen Physik in den letzten 25 Jahren bewußt verzichten will.

Koppe (Vancouver, Canada).

Prigogine, I.: Sur le rôle de la vitesse d'ensemble dans la diffusion. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 930—942 (1948).

Verschaaffelt, J. E.: Sur la dynamique des mélanges gazeux non-homogènes. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 31—41 (1949).

Optik:

Maréchal, André: Sur les aberrations géométriques des systèmes optiques faiblement décentrés. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 668—670 (1949).

Verf. betrachtet ein zentriertes optisches System, bestehend aus zwei Teil-

systemen, von denen er das erste System gegen das zweite dezentriert und angibt, wie sich in diesem Falle der die Seidelschen Bildfehler angegebende Ausdruck verändert. Dies läßt sich mathematisch auf eine Transformation zurückführen. Der Ausdruck jedes einzelnen Bildfehlers erhält auf diese Weise gewisse Zusatzglieder, die alle — bis auf einen — einem der bekannten Bildfehler entsprechen, so daß die einzelnen Bildfehler nur in ihrem Betrage verändert werden, zu denen dann noch der eine sonst nicht vorhandene hinzukommt. Auch auf die Aberrationen höherer Ordnung dehnt Verf. seine Untersuchungen über den Einfluß der Dezentrierung auf die Abbildungsfehler aus. Es ergibt sich aber, daß es nicht möglich ist, die Aberrationen eines leicht dezentrierten optischen Systems mit denen eines anderen nicht dezentrierten Systems zu identifizieren. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Friedländer, F. G.: Note on the geometrical optics of diffracted wave fronts. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 395—404 (1949).

Eine Lösung der Wellengleichung $c^{-2} \partial^2 u / \partial t^2 = \nabla^2 u$, für die außerhalb einer Fläche S_0 ursprünglich sowohl u als auch $\partial u / \partial t$ verschwindet, verschwindet zur Zeit t außerhalb einer Fläche S_3 , die zu S_0 parallel ist und von ihr den Abstand ct besitzt, wie bekannt ist. Verf. weist darauf hin, daß ähnliche Beziehungen für die Lösungen der linearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Grenzbedingungen des Cauchy-Typs gelten, daß aber die Wellenfronten der Lösungen solcher Probleme, in denen einige der Grenzbedingungen von der Art sind, daß sie Reflexionen darstellen, bisher nicht behandelt zu sein scheinen. Und auch speziell der Fall der Beugung scheint bezüglich des Verhaltens der Wellenfronten überhaupt nicht behandelt zu sein (Auftreten von Schattenbereichen). In der vorliegenden Arbeit beschäftigt er sich daher vornehmlich mit der Ausdehnung der bekannten Eigenschaften der Wellenfronten auf den Fall vorliegender Reflexion bzw. Beugung. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Franz, Walter: Zur Formulierung des Huygensschen Prinzips. Z. Naturforsch. 3a, 500—506 (1948).

Eine Formulierung des Huygensschen Prinzips für elektromagnetische Wellen wird mit Hilfe der Greenschen Dyade abgeleitet. Die abgeleitete Darstellung läßt erkennen, daß die Wellengleichungen für beliebige Randwerte erfüllt werden, wie dies auch für die übliche Kirchhoffsche Formel der skalaren Theorie der Fall ist. Die Kirchhoffsche Theorie erscheint hier aber nicht als Lösung einer Randwertaufgabe, sondern als Sprungwertproblem. — Verf. geht auf eine frühere Arbeit von Kottler [Ann. Physik 70, 405—456 (1923); 71, 457 (1923)] näher ein, in der der Sprungwert als Eigenschaft des schwarzen Schirmes interpretiert wurde, während sie hier als Grundzug der Kirchhoffschen Theorie anzusehen ist. *Picht*.

Meixner, Joseph: Strenge Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe. Z. Naturforsch. 3a, 506—518 (1948).

Nach der Formulierung des Beugungsproblems und Aufstellung einiger daraus für die Beugung am vollkommen leitenden Schirm sich ergebender Eigenschaften der gebeugten elektromagnetischen Welle und ihrer mathematischen Formulierung behandelt Verf. eine Verallgemeinerung des Babinetschen Prinzips. Er geht sodann auf die Debyeschen Potentiale und ihre Randbedingungen ein, zwei skalare Potentiale Π_1 und Π_2 , von denen das erste eine verschwindende radiale Komponente des magnetischen Vektors, das zweite eine verschwindende radiale Komponente des elektrischen Vektors besitzt. Mit Hilfe dieser Debyeschen Potentiale wird das Beugungsproblem formuliert. Zur Behandlung der Beugung an der Kreisscheibe werden Sphäroidkoordinaten eingeführt, die Kantenbedingungen formuliert und die Sphäroidfunktionen näher untersucht. Für die Debyeschen Potentiale werden Reihen nach Kugelfunktionen sowie eine Entwicklung nach Laméschen Wellenfunktionen angegeben. Zur weiteren Berechnung der Debyeschen Potentiale zerlegt sie Verf. in zwei Teile, die dann einzeln untersucht werden. Endlich wird näher auf

den Grenzfall großer Wellenlängen eingegangen, und es werden Bemerkungen zur numerischen Auswertung der erhaltenen Formelaustrücke gegeben. *Picht*.

Mirimanov, R. G.: Diffraction einer sphärischen elektromagnetischen Welle an einem dünnen sphärischen Segment. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 65—67 (1949) [Russisch].

Ausgehend von einem in einer früheren Arbeit des Verf. abgeleiteten mathematischen Ausdruck für das skalare Potential, aus dem sich die elektrische und magnetische Feldstärke in den einzelnen Stellen des Raumes ableiten lassen, behandelt der Verf. in vorliegender Arbeit beugungstheoretisch die Feldverteilung, die sich nach der elektromagnetischen Lichttheorie nach dem Durchgang der elektromagnetischen Welle durch eine aus dünnen Kugelsegmenten bestehenden Linse im Bildraum ergibt. In den Formeln treten neben den Besselschen Funktionen auch die Kugelfunktionen auf. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Françon, Maurice: Limite de séparation du microscope à contraste de phase. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1413—1414 (1949).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Untersuchungen, betreffend das mikroskopische Auflösungsvermögen bei Benutzung des Phasenkontrastverfahrens, sowie mit der Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Größe der das Objekt zentral abblendenden Phasenplatte. An sich wird das Auflösungsvermögen mit Vergrößerung der Phasenplatte vergrößert, gleichzeitig wird aber der Kontrast im Bilde verringert, so daß man sich mit einer mittleren Größe der Phasenplatte begnügen muß, deren Größe (Durchmesser) der Verf. mit $1,04 \lambda / 2n \sin u$ angibt. *Picht*.

Gabor, D.: Microscopy by reconstructed wave-fronts. Proc. R. Soc., London A 197, 454—487 (1949).

Es wird eine Zwei-Schritt-Methode der optischen Bilderzeugung beschrieben, die — kurz gesagt — darin besteht, daß das Beugungsbild, das durch Interferenz der vom kohärent-monochromatisch beleuchteten Objekt ausgehenden Beugungswellen mit dem in gleicher Art beleuchteten Hintergrund entsteht und photographisch aufgenommen und entwickelt usw. ist, erneut — in seine ursprüngliche Lage gebracht — mit dem kohärenten Hintergrund allein beleuchtet wird und bei Aberrationsfreiheit der abbildenden Optik ein dem Objekt entsprechendes Bild liefert. Dies wird mathematisch näher begründet. Es wird darauf hingewiesen, daß die für die kohärente Hintergrundbeleuchtung benutzte Lichtquelle nicht die gleiche zu sein braucht wie die zur Erzeugung des Beugungsbildes benutzte, so daß insbesondere dieses Beugungsbild auch mittels Elektronenmikroskop erzeugt sein kann, während das Reproduktionsbild mittels Lichtstrahlung erzeugt wird.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Lunenburg, Rudolf: Metric methods in binocular visual perception. Studies Essays, pres. to R. Courant, 215—240 (1948).

Es wird zunächst auf optisch-physiologische Versuche von Helmholtz, Hillebrandt und anderen hingewiesen, aus denen hervorgeht, daß der „visuelle Raum“ nicht mit dem „physikalischen Raum“ übereinstimmt. Physikalisch gerade Linien erscheinen z. B. dem beobachtenden Auge im allgemeinen gekrümmt, während dem Auge gerade erscheinende Linien, d. h. Linien, die im visuellen Raume gerade sind, im physikalischen Raum sich als krummlinig erweisen. Ähnliche Verschiedenheiten bestehen für beide Räume bezüglich der Lokalisation eines Gegenstandes, seiner Farbe und Helligkeit. Wenn auch der Grad der Unterschiede im visuellen und im physikalischen Raume teilweise durch Verstandeseinflüsse beeinflusst sein wird, so müssen sich diese doch ausschalten lassen, und es muß möglich sein, bestimmte mathematische Beziehungen zwischen den beiden Räumen anzugeben. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Aufstellung bzw. Ableitung derartiger mathematisch formulierter Beziehungen zwischen dem visuellen und dem physikalischen Raum. Insbesondere werden die Eigenschaften derartiger funktioneller Zusammenhänge näher diskutiert, um aus ihnen dann die Form der betreffenden Funktionen — wenigstens mit Bezug auf bestimmte visuelle bzw. physikalische Beobachtungen — zu bestimmen. — Der Verf. weist noch darauf hin, daß die Kenntnis der Funktionen, die den Zusammenhang zwischen dem visuellen und dem physikalischen Raum

vermitteln, besonders für stereoskopisch-optische Instrumente, z. B. auch binokulare Mikroskope u. a. von wesentlicher Bedeutung ist.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Hubert, Pierre: *Lentille magnétique à axe curviligne*. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 302—304 (1949).

In einem Magnetfeld mit einer Symmetrieebene π verläuft eine Elektronenbahn T , deren Anfangsgeschwindigkeit in π liegt, ganz in dieser Ebene. Die Nachbarbahnen von T können im begleitenden Dreibein der Bahnkurve T beschrieben werden: r sei der Normalabstand der Nachbarkurve von T in π , z sei die senkrecht zu π gemessene Koordinate und x sei die auf T gezählte Bogenlänge. Es zeigt sich, daß die Nachbarbahnen um die Bahn T unabhängige Schwingungen $\ddot{r} = -F_1(x) r$ und $\ddot{z} = -F_2(x) z$ ausführen, so daß das Feld wie eine Zylinderlinse wirkt. Durch besondere Wahl des Feldes kann man erreichen, daß die beiden Fokussierungspunkte eines vom gleichen Punkt ausgehenden Elektronenbündels zusammenfallen. Das Feld wirkt wie eine Linse mit der krummlinigen Achse T . Alle bisher üblichen Fokussierungssysteme durch magnetische Ablenkung insbesondere auch der von Nils Svartholm betrachtete Fall, sind als Spezialfälle im vorliegenden enthalten. [Es werde bemerkt, daß das Prinzip der Richtungs-Doppelfokussierung nicht, wie angeführt, zuerst von Nils Svartholm und Kai Siegbahn, Ark. Mat. Astr. Fys. 33, A. n. 21 (1946) angegeben worden ist, sondern in der beim Ref. in Prag im Jahre 1936 von R. Wallauschek verfaßten Dissertation „Elektronenoptische Fokussierung durch quasistatische Bahnen“ Z. Physik 117, 565 (1941), Anm. d. Ref.]

W. Glaser (Wien).

Horvath, J. I.: *Notices on proposed magnetic lenses of toroidal type*. Experimentia, Basel 5, 112—114 (1949).

Während in einer Arbeit von W. T. Harris [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 310 (1947)] magnetische Linsen toroidaler Form vorgeschlagen wurden, die ein paralleles Strahlenbündel geladener Teilchen gleicher Energie der kosmischen Strahlung fokussieren sollten, war bereits ohne vorherige Kenntnis jener Arbeit eine magnetische Linse toroidaler Form zu anderen Zwecken entwickelt und gebaut worden, über die Verf. näher berichtet. Ihr Zweck: ein Strahlenbündel von Elektronen gleicher Energie, die von einer punktförmigen Quelle ausgehen, zu fokussieren. Als Gleichung der Profile der Linse gegen die Elektronenquelle sowie gegen den Wiedervereinigungspunkt gibt der Verf. folgende Beziehung an: $X = y(A - y)/(\sqrt{R^2 - y^2})$, worin A der Abstand vom dem Quellpunkt bzw. dem Fokus und R der Radius des im magnetischen Feld gekrümmten Weges der Elektronen ist. Verf. diskutiert diese Linsenanordnung noch näher, um dann auf die Inhomogenitäten des Feldes an seinen Grenzen einzugehen, die sich besonders bei Elektronen geringerer Geschwindigkeit für die Fokussierung unangenehm bemerkbar machen. Um ihren Einfluß weitgehend auszuschalten, schlägt Verf. noch eine andere magnetische Linse toroidaler Form vor, deren der Quelle zugekehrte Fläche die Quelle halbkugelförmig umgibt, so daß die Strahlen senkrecht in das Feld eintreten, während die zweite Fläche der geometrische Ort der Berührungspunkte der vom Wiedervereinigungspunkt aus gezogenen Tangenten an die im magnetischen Felde kreisförmigen Elektronenbahnen ist, deren Radius ja durch die Stärke des homogenen magnetischen Feldes bestimmt ist. Die Form dieser zweiten Grenzfläche wird mathematisch bestimmt.

Picht (Potsdam).

Duchesne, Maurice: *Sur le calcul dans un objectif à immersion à symétrie axiale du potentiel le long de l'axe et de ses dérivées*. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1407—1408 (1949).

Es wird zunächst darauf hingewiesen, daß man zur Berechnung der Abbildungseigenschaften (Bestimmung der Bildebene, der linearen Vergrößerung und der Aberrationen dritter Ordnung) eines Immersions-Objektivs der Elektronenoptik, das aus der ebenen Kathode und zwei Blenden gleicher Blendenöffnung, aber verschiedenen Potentials besteht, die Kenntnis der Potentialfunktion längs der Symmetriechse (z -Achse) und ihrer beiden ersten Ableitungen benötigt. Bestimmt man die Potentialfunktion längs der Achse im elektrolytischen Trog, so wird die hier auf graphischem Wege vorzunehmende Bestimmung der beiden ersten Ableitungen verhältnismäßig ungenau. Es sei indessen in dem angegebenen speziellen Immersionsobjektiv leicht, die Potentialfunktion und demnach auch ihre Ableitungen mathematisch exakt zu berechnen, da sie der Potentialgleichung genügt und diese sich leicht integrieren läßt, wenn man das Potential als lineare Kombination — also Integration — von Funktionsausdrücken betrachtet, die ihrerseits aus je zwei Faktoren bestehen, von denen der eine nur von der z -Koordinate, der andere nur von dem Achsenabstand r abhängt. In allgemeiner Form ergibt sich also

für das Potential im Raume das Integral

$$\int (A_k \sin kz + B_k \cos kz) (C_k J_0(ikr) + D_k N_0(ikr)) dk,$$

wo die Koeffizienten A_k, B_k, C_k, D_k von den Grenzbedingungen abhängen und J_0 bzw. N_0 die Besselsche bzw. Neumannsche Funktion nullter Ordnung sind. Die Integration ist über alle reellen und imaginären Werte zu erstrecken. Dieser Ausdruck läßt sich unter den speziellen Annahmen des Verf. über das Immersionsobjektiv noch wesentlich vereinfachen. Auch die Koeffizienten lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen bestimmen, was der Verf. näher durchführt und auf ein Zahlenbeispiel anwendet. Die erforderlichen Ableitungen ergeben sich in diesem Fall natürlich gleichfalls genau.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Relativitätstheorie:

• Thirring, H.: Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt. Dritte, verbesserte und ergänzte Auflage. Wien: Springer-Verlag 1948. V, 168 S. mit 8 Textabbildungen. S. 28.—; sfr. 12.—; \$ 2.80.

Tonnellat, Marie-Antoinette: Théorie unitaire du champ physique. 1. Les tenseurs fondamentaux et la connexion affine. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 368 bis 370 (1949).

Tonnellat, Marie-Antoinette: Théorie unitaire du champ physique. 2. Cas d'une métrique symétrique. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 660—662 (1949).

Verf. bemüht sich, den Ansatz der Schrödingerschen Feldtheorie (affiner Zusammenhang) noch allgemeiner durchzuführen als bei Schrödinger selbst geschehen ist — unter Hervorhebung nur solcher Relationen, welche unabhängig von jeder Spezialisierung oder Zusatzhypothese eintreten, sobald man Feldgleichungen einführt durch ein Variationsprinzip, dessen Lagrangefunktion irgendeine Funktion ist von folgenden Größen: a) Komponenten der verschiedenen Verjüngungen des affinen Krümmungstensors; b) Verjüngung $\Lambda_\mu = \Delta_{\mu\sigma}^0 - \Delta_{\sigma\mu}^0$, wenn $\Delta_{\mu\sigma}^0$ die Komponenten des affinen Zusammenhanges sind. Im zweiten Teil der Arbeit wird untersucht, welche zusätzlichen Folgerungen sich bei Einführung irgendeiner (wiederum in keiner Weise spezialisierten) Metrik ergeben.

P. Jordan (Hamburg).

Narlikar, V. V. and K. R. Karmarkar: The scalar invariants of a general gravitational metric. Proc. Indian Acad. Sci. A 29, 91—97 (1949).

Il résulte d'un raisonnement de T. Y. Thomas qu'une métrique riemannienne arbitraire à 4 dimensions admet un ensemble de 14 invariants différentiels indépendants du second ordre. Les A. indiquent explicitement un tel ensemble dont la construction fait intervenir d'une manière simple le tenseur de Ricci et le tenseur de courbure conforme de Weyl. Dans le cas, usuel en relativité générale, de la symétrie sphérique, l'ensemble se réduit à 4 invariants indépendants; à l'aide de ceux-ci les A. caractérisent en particulier les métriques à symétrie sphérique qui sont de classe un. Un exemple d'espace courbé dont tous les invariants sont nuls est esquissé. Le rapporteur regrette que les longs calculs nécessaires pour établir l'indépendance des 14 invariants donnés soient entièrement passés sous silence, ce qui ne permet pas une vérification complète des résultats énoncés.

Lichnerowicz (Paris).

Rosen, Nathan: Notes on rotation and rigid bodies in relativity theory. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 54—58 (1947).

Bei geeigneter Definition eines starren Körpers kann dieser so um eine Achse rotieren, daß die Geschwindigkeit dem Achsenabstand proportional ist. Der Abstand zweier Punkte des rotierenden Systems wird in einfacher Weise abgeleitet.

F. Hund (Jena).

Schlomka, Teodor: Relativitätstheorie und Unipolarinduktion. Ann. Physik, VI. S. 5, 51—62 (1949).

Verf. verweist zunächst auf die bisher übliche und der Behandlung durch die Relativitätstheorie zugängliche Berechnung, wo ein unendlich langer Magnetstab

mit konstanter Geschwindigkeit in Achsenrichtung bewegt wird, und stellt fest, daß Unipolarinduktion eigentlich mit Rotation eines magnetischen Körpers zu tun hat. Wendet man formell die spezielle Relativitätstheorie auf eine um eine Achse rotierende und in Achsenrichtung magnetisierte Kugel an, so ergibt sich im Gegensatz zum obenerwähnten Fall das Auftreten wahrer Ladungen im Inneren, hervorgerufen durch verschiedene Geschwindigkeiten in den einzelnen Raumgebieten der Kugel. Sommerfeld [Elektrodynamik, Bd. III, Leipzig 1949] erwähnt bereits dieses vom Standpunkt der Minkowskischen Theorie unverständliche Verhalten und schließt daraus, daß die spezielle Relativitätstheorie für Rotationsprobleme nicht ohne weiteres zulässig ist. *Mann (München).*

Klitzing, Kurt Hans von: Zur Veranschaulichung der relativistischen Zeitdilatation. Z. Naturforsch. 3a, 176—179 (1948).

Analog zur anschaulichen Deutung der Lorentzkontraktion auf Grund der Verkürzung der kugelförmigen Potentialflächen einer Punktladung in der Bewegungsrichtung um den Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ nach Heaviside, wird eine Veranschaulichung der Zeitdilatation gegeben, indem als Prototyp einer Uhr eine Hohlkugel gewählt wird, von deren Zentrum ein Lichtsignal ausgeht, das nach Reflexion an der Wand nach der Zeit τ wieder zum Zentrum zurückkehrt. Die „Periode τ dieser Uhr“ erfährt dann auf Grund der Lorentzkontraktion der Hohlkugel bei der Bewegung die bekannte Zeitdilatation. Es wird darauf hingewiesen, daß die dargelegten Veranschaulichungen, welche das Relativitätsprinzip nicht benützen, lediglich den Charakter von Hilfsvorstellungen haben können, da dem Begriff einer absoluten Bewegung kein physikalischer Sinn zukommen kann. *W. Glaser.*

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Conwell, Esther: Wave functions for H^- obtained by variation method. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 277—278 (1948).

Verf. verwendet zur Bestimmung der Energie des Grundzustandes die Variationsmethode mit Näherungsfunktionen $f_1(r_1) \cdot f_2(r_2) \cdot (1 + cr_{12})$. Bei gegebenem c gibt die Forderung bestmöglicher f ein Paar Integro-Differentialgleichungen für f_1 und f_2 , die durch Iteration mit numerischer Integration gelöst werden, wobei bei jedem Schritt auch c zu verbessern ist. — Die Berechnungen wurden durchgeführt einmal unter der Annahme, daß $f_1 = f_2$ zu bestimmen ist, das andere Mal nur f_2 , während $f_1 = e^{-r_1}$ gesetzt wird. Es zeigt sich, daß der Austausch berücksichtigt werden muß. *Romberg (Blindern/pr. Oslo).*

Dirac, P. A. M.: Quantum theory of localizable dynamical systems. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1092—1103 (1948).

Die Begriffsbildungen der nichtrelativistischen Quantenmechanik werden relativistisch verallgemeinert. Das gelingt für lokalisierbare dynamische Systeme. Solche werden durch Wellenfunktionen beschrieben, die nur von Variablen abhängen, die sich auf Punkte im Raum-Zeit-Kontinuum beziehen (wie Örter von Teilchen, Feldgrößen). Ein besonderer Zustand des Systems wird dann beschrieben durch eine ψ -Funktion auf irgendeiner dreidimensionalen Fläche S von raumartigem Verlauf im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum. An die Stelle der Schrödinger-Gleichung der gewöhnlichen Quantentheorie tritt eine Beziehung $\psi_2(q_2) - \psi_1(q_1) = -i\varepsilon A \psi_1(q_1)$, die die ψ -Funktion auf der Fläche S_1 mit der ψ -Funktion auf der infinitesimal benachbarten Fläche S_2 verknüpft (A ist ein linearer Operator, ε der Parameter der Variation von S). Die Untersuchung im einzelnen geschieht durch Einführung krummliniger Koordinaten auf S und speziellem Ausdruck der Variation von S . So findet sich der Ausdruck $X_2 - X_1 = -i\varepsilon(X_1 A - A X_1)$

für die Änderung einer dynamischen Variablen X wieder und Vertauschungsbeziehungen für die Größen γ^s , die die Metrik auf S bestimmen und die Operatoren, mit denen man die Änderungen von ψ beschreiben kann. Aufstellung möglicher relativistischer Theorien bedeutet jetzt Aufsuchung von Beispielen von Operatoren, die diese Vertauschungsregeln erfüllen.

F. Hund (Jena).

• Broglie, Louis de: *Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs*. Paris: Gauthier-Villars 1949. VI, 208 p. francs 2500.

Im ersten Teil wird die Feldquantelung noch außer Acht gelassen. Es liegt das Schema $H\psi + i\hbar\dot{\psi} = 0$ zugrunde, wobei ψ in üblicher Weise den physikalischen Zustand beschreibt. Insbesondere wird des Verf. Theorie mit einer 16-komponentigen ψ -Größe eingeführt [dies. Zbl. 9, 382; 10, 188; 21, 187; 25, 138]. Sie führt auf Gleichungen, in denen 16-reihige Matrizen vorkommen, die aus den Diracschen α -Matrizen gebildet sind, und auf die Wellengleichung $\square\psi - k_0^2\psi = 0$. Das Vorkommen zweier divergenzfreier Energie-Impuls-Tensoren ermöglicht die Zerlegung des Drehimpulses in einen Bahn- und einen Spinanteil. Aus der Größe ψ° des „Vernichtungszustandes“ und der Größe ψ werden mit Hilfe der oben genannten Matrizen eine Invariante, ein Vierervektor, ein (schiefsymmetrischer) Sechsertensor, ein Pseudovierervektor und ein Pseudoskalar gebildet; die für Vektor- und Sechsertensor folgenden Gleichungen stimmen bis auf Glieder mit k_0^2 mit den Maxwell'schen Gleichungen für die elektromagnetischen Größen $A_\mu, F_{\mu\nu}$ überein; die für die anderen Größen folgenden Gleichungen entsprechen Teilchen mit dem Spin null. Eine ebene Welle hat vier unabhängige Komponenten. Das System der Gleichungen läßt sich nur für $k_0 \neq 0$ aufstellen; soweit die Theorie auf Photonen angewandt werden soll, ist aber ein endliches k_0 nicht zu gebrauchen; so muß k_0 als äußerst klein angenommen werden. Die $A_\mu, F_{\mu\nu}$ entsprechenden, zunächst komplexen Größen werden nun als elektromagnetische Größen gedeutet; für makroskopische Vorgänge kommt es nur auf die reellen Summen $A_\mu^* + A_\mu, F_{\mu\nu}^* + F_{\mu\nu}$ an. — Im zweiten Teil führt die Feldquantelung in der Form $c_i = e^{i\partial/\partial n_i} \sqrt{n_i}$ für $\psi = \sum c_i \psi_i$ oder die kanonische Feldquantelung auf Vertauschungsregeln für die c_i , die mit einer Operatorengleichung für die Anzahlen n_i erfüllt werden. Die Vertauschungsregeln für die elektromagnetischen Größen werden in invarianter Form angegeben. Im allgemeinen läßt die Theorie elektrisch positive, elektrisch negative und neutrale Teilchen zu; bei der Anwendung auf Photonen kommen nur die neutralen in Betracht. — Der dritte Teil über Wechselwirkung von Strahlung und Materie bedient sich der Gleichung für die Anzahlen n_i der Photonen; dabei bedarf die Wechselwirkung zwischen geladenen Partikeln mittels der longitudinalen Wellen besonderer Untersuchung (k_0 nicht exakt null).

F. Hund (Jena).

March, Arthur: *Quantentheorie der Wellenfelder und kleinste Länge. I*. Acta physica Austriaca 1, 19—41 (1947).

Elementarteilchen heißen ausgedehnt, wenn aus der Koinzidenz der Teilchen A mit B und B mit C nicht die von A mit C folgt. Es wird der Abstand zweier Teilchen durch die Zahl der Glieder in einer Kette von Maßpartikeln gemessen, von denen je zwei benachbarte koinzidieren, und es wird die Annahme eines kleinsten Abstandes l_0 im invarianten Sinne gemacht [dies. Zbl. 28, 39]. Eine auf dieser Grundlage vorgenommene Abänderung der Theorie des Elektromagnetismus führt bei Streuung des Lichtes an einem Elektron nicht zu merklichem Einfluß auf die Wirkungsquerschnitte.

F. Hund (Jena).

March, Arthur: *Quantentheorie der Wellenfelder und kleinste Länge. II*. Acta physica Austriaca 1, 137—154 (1947).

Die Abänderung der Theorie des elektromagnetischen Feldes (s. vorsteh. Referat) wird als relativistisch invariant nachgewiesen. Die entsprechende Abänderung der Mesontheorie der Kernkräfte führt zu einem Verständnis der Reichweite und hat Folgen für die Streuung energiereicher Mesonen an Nukleonen.

F. Hund.

Chang, T. S.: Relativistic field theories. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 75, 967—971 (1949).

Für die Gleichung, die die Änderung der ψ -Funktion bei infinitesimaler Änderung der S -Fläche angibt (s. dies. Zbl. 33, 93) werden einige Bedingungen angegeben. Feldtheorien, die aus einer Lagrangefunktion folgen, können im Anschluß an P. Weiß (gemeint ist wohl die dies. Zbl. 19, 430 referierte Arbeit) behandelt worden. Dessen Verfahren wird für allgemeine Änderungen der S -Fläche vervollständigt und es wird gezeigt, daß die allgemeinen Bedingungen erfüllt sind. Durch eine einfache Transformation geht der Formalismus in einen von Tomonaga gegebenen über [*Progr. theoret. Physics* 1, 27 (1946)]. *F. Hund* (Jena).

Ashauer, Sonja: A generalization of the method of separating longitudinal and transverse waves in electrodynamics. *Proc. R. Soc.*, London A 194, 206—217 (1948).

In einem System aus Partikeln und elektromagnetischem Feld wird die Zerlegung so ausgeführt, daß die Fourierkoeffizienten des Viererpotentials (nach dem Wellenzahl-Vierervektor k_μ entwickelt) zerlegt werden in einen Anteil parallel dem k -Vektor, einen Anteil parallel einem weitgehend frei wählbaren zweiten Nullvektor (der von k abhängen darf) und einem zu beiden senkrechten Vektor. Die longitudinalen Feldgrößen können eliminiert werden und durch eine Wechselwirkung zwischen den Partikeln ersetzt werden, die auch von den transversalen Feldgrößen abhängen kann. Am Beispiel der Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Kern wird die Zerlegung in bestimmter Weise durchgeführt; für ein sehr rasches Elektron ist sie vielleicht von Vorteil. *F. Hund* (Jena).

Román, P.: Spin and wave function of an elementary particle. *Nature*, London 164, 406—407 (1949).

Verf. stellt eine Wellengleichung auf, die der Diracschen Gleichung des Elektrons sehr ähnlich ist. Die den Diracmatrizen entsprechenden 4-reihigen Román-Matrizen genügen in Raum- und Zeitkomponenten verschiedenen Antikommutationsrelationen. Verf. zeigt, daß seine Gleichung zu denselben Werten für Spin und magnetisches Moment des Elektrons führt wie die Diracsche. Da seine Wellenfunktionen sich nicht wie Spinoren transformieren und seine Gleichung nicht Lorentzinvariant ist, so schließt er, daß keine feste Beziehung zwischen Spin eines Teilchens und den Transformationseigenschaften einer Wellenfunktion bestehe. *Kofink*.

Murard, R.: Les conditions de normalisation en théorie du corpuscule libre. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 224, 807—809 (1947).

● **Pauli, Wolfgang:** Meson theory of nuclear forces. *Rev. ed.* New York: Interscience Publishers Ltd. 1948. 77 p. illus. \$ 2.00.

Winans, J. G.: A classical model for the nucleus. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 71, 279 (1947).

Es wird zunächst festgestellt, daß im ganzen periodischen System zwischen Kernladung Z und Kernmasse M in guter Näherung der Zusammenhang $M^{\frac{1}{3}} - 1,15 = 0,528 \cdot Z^{\frac{1}{3}}$ besteht. Dieser Zusammenhang ergibt sich sofort, wenn man annimmt, daß die Protonen in den Kernen — evtl. in bestimmtem Mischungsverhältnis mit Neutronen — nur in Form einer kugelschalenförmigen Oberflächenschicht angeordnet sind. Man bekommt Übereinstimmung mit den empirischen Zahlen, wenn man in dieser Oberflächenschicht Protonen und Deuteronen in gleicher Anzahl annimmt. Es wird diskutiert, wie sich eine Reihe bekannter Kernprozesse in diesem Bilde darstellen. Der α -Zerfall beispielsweise würde zustande kommen durch Vereinigung zweier Oberflächendeuteronen, wobei gleichzeitig die Zerfallsenergie zur Verfügung gestellt wird. *Volz* (Erlangen).

Slotnick, Murray and Walter Heitler: The charge density and magnetic moments of the nucleons. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 75, 1645—1663 (1949).

Von Havens, Rabi und Rainwater wurde 1947 eine schwache Anziehung zwischen Neutron und Elektron gefunden, die kein Spineffekt ist. Verff. berechnen

sie in der Form eines Volumenintegrals der Wechselwirkung der Neutronenladungswolke mit dem elektrischen Feld eines Elektrons unter Benutzung der pseudoskalaren Mesonentheorie und finden sie dem Vorzeichen und der Größenordnung nach in Übereinstimmung mit dem Experiment. Aus der Spin-Bahnwechselwirkung des Kernteilchens in einem elektrischen Feld berechnen sie die magnetischen Momente von Neutron und Proton; ihre Werte hängen sehr empfindlich von den noch der Stütze bedürftigen Voraussetzungen der Theorie — symmetrische oder nur geladene Mesonen — ab. Die Rechnung wurde relativistisch ausgeführt; Kernteilchenfeld und pseudoskalares Mesonenfeld wurden hypergequantelt. Beim Vergleich der pseudoskalaren mit der pseudovektoriellen Kopplung finden Verff. zwar dieselben magnetischen Momente, aber ein logarithmisch divergierendes Volumenintegral der Neutron-Elektronwechselwirkung im zweiten Fall. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Berechnung der Verschiebung des $2s$ -Terms des Wasserstoffatoms durch die Anwesenheit der Mesonenladungswolke um das Proton.

Kofink (Stuttgart).

Wolfenstein, Lincoln: Theory of proposed reactions involving polarized protons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1664—1674 (1949).*

Die Anwendung schneller, polarisierter Teilchen bei Kernreaktionen eröffnet einen Weg, die Spinabhängigkeit der Kernwechselwirkung zu untersuchen. Verf. formuliert für Neutronen und Protonen einige Sätze über die Wirkung der Polarisationsverhältnisse im einfallenden Strahl auf die Winkelverteilung der Streuintensität. Er berücksichtigt dabei alle Partialkugelfunktionen bis zu jener, welche dem höchsten Drehimpuls der Streuteilchen korrespondiert, die bei einer vorgegebenen Energie in den wirksamen Bereich der Kernkräfte gelangen. Unter Anwendung dieser Sätze betrachtet er drei Arten von Kernreaktionen mit polarisierten Protonen: 1. die Erzeugung polarisierter Protonen durch die (n, p) -Reaktion von N oder He^3 unter Ausnutzung polarisierter thermischer Neutronen; 2. den Nachweis der Polarisation mit Hilfe der $\text{Li}^7(p, \alpha)$ -Reaktion und 3. die Erzeugung oder den Nachweis durch die Resonanzstreuung von Protonen durch Helium. *Kofink.*

Chew, Geoffrey F. and Marvin L. Goldberger: On the analysis of nucleon-nucleon scattering experiments. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1637—1644 (1949).*

Verff. entwickeln eine auf Kernstreuoprobleme zugeschnittene Störungsrechnung. Da jeder Beitrag zur Systemenergie, der dort relativ klein ist, wo das Kernpotential groß ist, als Störung behandelt werden kann, besteht die Möglichkeit, eine dem speziellen Problem angepaßte Größe als Störung zu wählen. Verff. wählen einerseits die Energie der einfallenden Teilchen, andererseits (im Falle der Proton-Protonstreuung) das Coulombfeld als Störung. Im ersten Fall stellen sie eine Entwicklung des ctg der Phasenverschiebung bei der Streuung nach Potenzen der Energie auf, im zweiten Fall geben sie Entwicklungen, welche die Phasenverschiebungen im kombinierten Kern- und Coulombfeld zu denen im reinen Kernfeld in Beziehung setzen. Die bisherigen Verfahren lassen die rasche Konvergenz der Entwicklung unerklärt; in dieser Abhandlung wird ein allgemeiner Ausdruck für jene Größe abgeleitet, nach der in einem vorgegebenen Fall eine Entwicklung zu einer konvergenten Reihe führt. Die Bestimmung der jeweils nötigen Zahl von Gliedern in der Entwicklung geht auf wohldefiniertem Weg vor sich. Die höheren Glieder in der Entwicklung nach der Energie sind von physikalischem Interesse wegen der Auskunft, die sie über die Form des Kernpotentials geben. Verff. beschäftigen sich jedoch nicht mit dieser Seite des Problems. Ihre mathematische Methode, um die Entwicklungen zu gewinnen, benutzt einen Zusammenhang der Wronskischen Determinante zweier linear unabhängiger Lösungen der Schrödingergleichung mit der Phasenverschiebung am Streuer.

Kofink (Stuttgart).